Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра инженерной графики

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИСКИЙ КОМПЛЕКС

по курсу «**Инженерная компьютерная графика**»

для студентов БГУИР дистанционной формы обучения всех специальностей:

2013

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сведения об ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по дисциплине «Инженерная компьютерная графика» предназначен для студентов БГУИР дистанционной формы обучения.

ЭУМК составлен на основе учебной программы по курсу «Инженерная компьютерная графика.

Подготовка ЭУМК: Касинский Б.А.

При составлении ЭУМК использован обучающий теоретический и практический материал авторов:

- тексты лекций: Скурко В.В., Задруцкий С.А., Гракович В.Ю., Шимкович Г.Л.;

- методические указания и задания к контрольной работе и индивидуальной практической работе: Столер В.А., Куценко В.Н., Касинский Б.А.

Методические рекомендации по изучению дисциплины

Основная форма изучения предмета - самостоятельная работа с учебной и учебно-методической литературой (рекомендуемой в учебной программе), решение задач, выполнение контрольной работы и индивидуальной практической работы. В помощь студентам дистанционной формы обучения БГУИР предусмотрены:

- консультации по расписанию кафедры инженерной графики;

- рецензирование контрольной работы;

- рецензирование индивидуальной практической работы.

Защита контрольной работы и индивидуальной практической работы производится во время консультации. За период изучения курса ИКГ выполняется одна контрольная работа и одна индивидуальная практическая работа.

Перед выполнением графических работ по отдельным темам необходимо изучить материал соответствующей лекции, раздела учебника, а также ознакомиться с требованиями стандартов ЕСКД, относящихся к данной работе.

Контрольная работа выполняется с использованием ПК, а индивидуальная практическая работа в карандаше.

Форматы листов заданий выбираются согласно ГОСТ 2.301-68. Вычерчивание внутренней рамки является обязательным.

На всех листах в правом нижнем углу формата вплотную к рамке помещается основная надпись. На листах формата А4 (210х297 мм) основные надписи располагают только вдоль короткой стороны листа. Размеры и текст основной надписи для согласно ГОСТ 2.104-2006, форма 1 (185х55 мм).

Обозначение при заполнении основной надписи в работах например – ИГ 1.25.02, где:

- ИГ – кафедра инженерной графики;

- 1 – контрольная работа, (2 – индивидуальная практическая работа);

- 25 – вариант;

- 02 – № листа данной работы.

Все задания выполняются с помощью инструментов в заданном или выбранном масштабе (ГОСТ 2.302-68) с учетом наиболее равномерного распределения изображений в пределах формата листа.

Линии на чертежах должны соответствовать ГОСТ 2.303-68.

Все надписи, как и отдельные обозначения, в виде букв и цифр, должны быть выполнены шрифтом чертежным в соответствии с ГОСТ 2.304-81.

В задачах по начертательной геометрии (индивидуальная практическая работа, задачи 1…7) все основные вспомогательные построения должны быть сохранены.

Обозначение точек, прямых, плоскостей, углов в задачах индивидуальной практической работы, является обязательным.

На чертежах должны отсутствовать линии невидимого контура (возможны исключения). Ясность и "читаемость" чертежей должны быть обеспечены посредством применения разрезов и сечений. (ГОСТ 2.305-2008).

Следует уделить серьезное внимание тщательности и аккуратности всех графических работ. Небрежно выполненные построения не только снижают качество чертежа, но и приводят к неправильным результатам.

В случае небрежного или неправильного оформления работ студенту может быть предложено дополнительное задание.

Складывание чертежей выполняется в соответствии с ГОСТ 2.501-88. Листы формата А3 складывают "гармошкой" до формата А4 (рис.1.1) изображением наружу так, чтобы основная надпись оказалась на верхней лицевой стороне в нижнем правом углу.

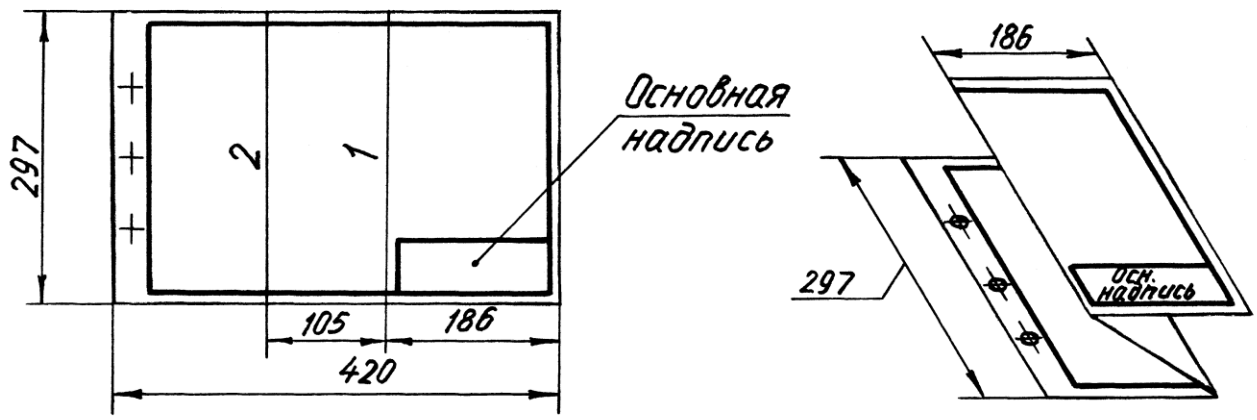


Рис.1.1. Формат А3 и линии сгиба

Листы следует сгибать по линиям, перпендикулярным основной надписи, в порядке, указанном цифрами 1, 2 (рис.1.1) на линиях сгибов.

Первая страница (титульный лист) работы должна быть оформлена по приведенному образцу (рис.1.2). Надписи следует выполнять чертежным шрифтом размерами 7 и 10.

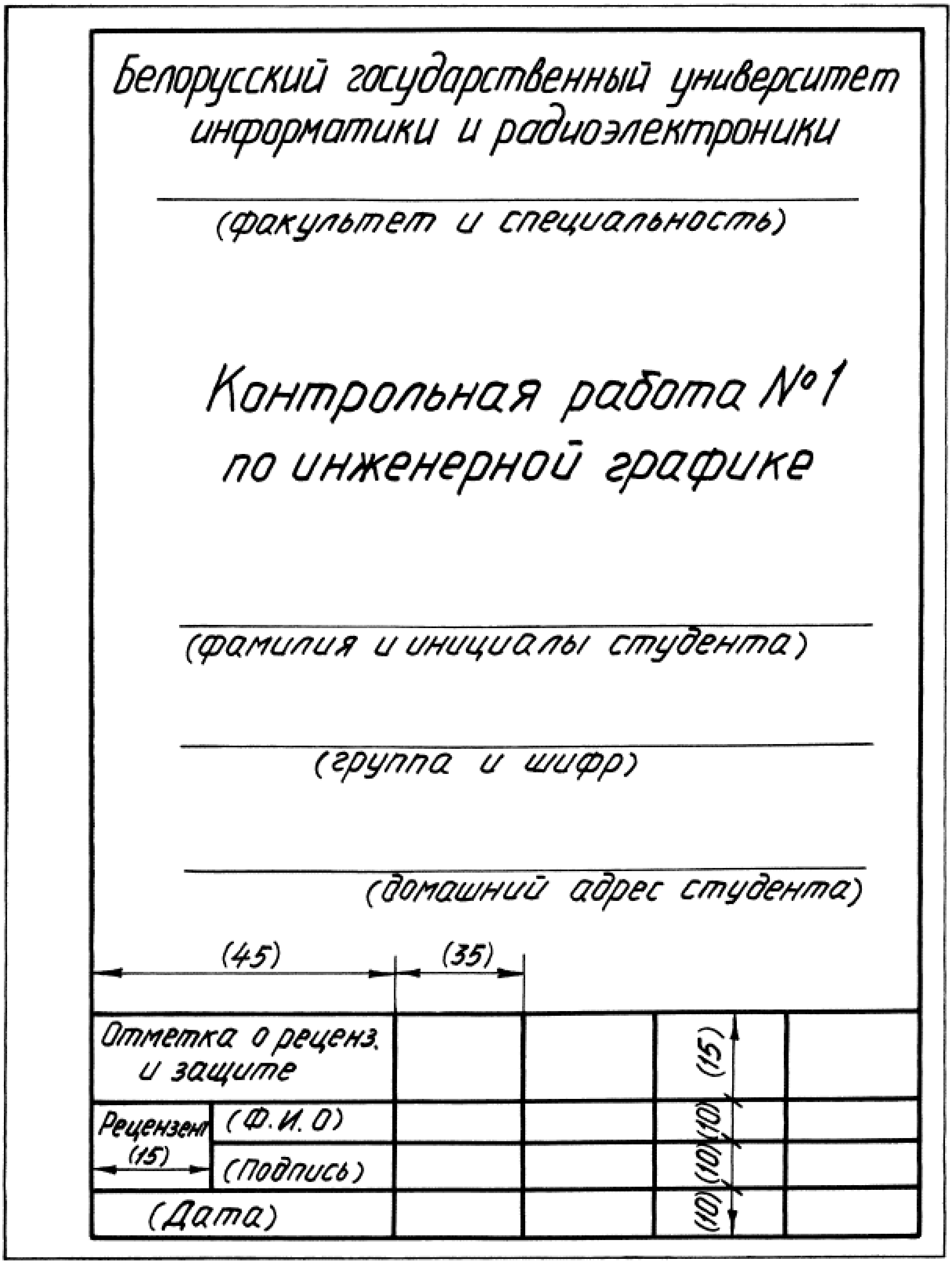


Рис.1.2. Титульный лист

Титульный лист, комплект чертежей работы должны быть сброшюрованы тесьмой или лентой в альбом формата А4. Работа, оформленная с отступлением от изложенных выше требований, не рецензируется.

Работа представляется на рецензию в полном объеме, на три-четыре недели раньше срока, указанного в учебном графике.

Электронные копии работ высылаются на электронный почтовый ящик в соответствии с требованиями ФНиДО. Выполнить электронные копии можно отсканировав чертежи или снять их цифровой камерой (максимальное число мегапикселов 3), больше не требуется. Изображения должны быть в формате JPG или GIF.

Преподаватель кафедры составляет рецензию, в которой отмечает достоинства и недостатки работы.

Если все задания выполнены правильно, в соответствии с методическими указаниями, требованиями стандартов и оформление отвечает вышеприведённым требованиям, работа рецензируется с отметкой "Допускается к защите".

При значительных недочетах работа возвращается с отметкой "К защите не допускается".

Студент должен внимательно ознакомиться с замечаниями рецензента, ликвидировать пробелы в знаниях, по требованию рецензента исправить ошибки, обязательно сохраняя замечания рецензента.

Если работа не допущена к защите, то на повторную рецензию работа высылается полностью, с вновь выполненными заданиями этой работы.

Если необходимо переделать титульный лист (например, шрифт не соответствует стандарту), то на повторную рецензию работа присылается с двумя титульными листами (прежним и вновь выполненным).

Все работы с отметкой "К защите допускается" должны быть защищены.

Защита осуществляется посредством собеседования с рецензентом. При этом студент обязан ответить на вопросы, касающиеся защищаемой работы.

Преподаватель-рецензент вправе аннулировать представленную работу и выдать новое задание, сообщив об этом на кафедру и в деканат ФНиДО, если при собеседовании убедится, что студент выполнил работу не самостоятельно.

На титульном листе защищенной работы ставится пометка «Работа защищена» с датой и подписью рецензента.

Защищенная работа хранится у студента до экзамена или зачета.

Рабочая учебная программа

Ознакомиться с учебной программой по специальности можно:

- учебная программа.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Лекции

Введение

Инженерная компьютерная графика включает в себя основы начертательной геометрии, элементы технического черчения и компьютерную графику.

При составлении настоящего пособия учтен многолетний опыт чтения лекций в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники. Часть графического материала, содержащегося в пособии, входит в студенческий конспект. В пособие включены специально подготовленные рисунки: наглядные изображения, способствующие лучшему пониманию и усвоению материала, условия задач и т.п.

В пособии используются обозначения и символы, общепринятые в учебной литературе.

В БГУИР в последние годы при обучении инженерной компьютерной графике все шире используются компьютерные мультимедийные системы. Связанные с этим вопросы, рассматриваемые на лекциях: устройство системы, работа плоттера, элементы программного обеспечения, алгоритмизация задач начертательной геометрии и др., включены в настоящее пособие.

Автор приносит благодарность коллегам, любезно предоставившим некоторые методические, материалы для их использования в пособии, и за ценные замечания, высказанные при рецензировании.

Обозначения и символы фигур:

1. Точки - прописными буквами латинского алфавита A, B, C или цифрами 1, 2, 3 ...

2. Линии - по точкам, определяющим линию, или строчными буквами латинского алфавита k, l, m, n.

3. Линии уровня: горизонтальная - h, фронтальная - f, профильная - p.

4. Поверхности, в т.ч. плоскости - строчными буквами греческого алфавита α, β, γ, ε, σ или римскими цифрами.

5. Углы - строчными буквами греческого алфавита φ, ω, ψ, δ.

6. Последовательность элементов - A_1, A_2, A_3; l_1,l_2, l_3,α_1, α_2, α_3.

7. Плоскости проекций: произвольная - π_0, горизонтальная -π_1, фронтальная - π_2, профильная - π_3, любая другая плоскость проекций - π_4, π_5...

8. Оси проекций - строчными буквами x, y, z . При введении дополнительных плоскостей -π_1/π_4, π_2/π_5... Начало координат - прописной буквой O.

Обозначение геометрических образов на плоскостях проекций:

1. Проекции точек, линий, поверхностей - теми же буквами (цифрами) что и оригинал с добавлением верхнего индекса:

- проекции на произвольную плоскость - A^0, B^0...; α^0, β^0...

- проекции на горизонтальную плоскость - A', B'...; α', β'...

- проекции на фронтальную плоскость - A'', B''...; α'', β''...

- проекции на плоскость π_4 - A^{IV}, B^{IV};α^{IV} ,β^{IV}...

2. Следы плоскости α : горизонтальный след - $h_{0\alpha}$, фронтальный след - $f_{0\alpha}$, профильный след - $p_{0\alpha}$.

3. Точки схода следов плоскости α - X_α ,Y_α ,Z_α.

Обозначение позиционных отношений между геометрическими фигурами или их образами:

1. $\in$, $\notin$ - принадлежит, является элементом, не принадлежит. Например, $A \in l$ - точка A принадлежит линии l.

2. $\subset$ - включает, содержит (понимается в смысле подмножество содержится в множестве). Например, $l \subset \alpha$ - линия l принадлежит плоскости α; $\alpha \subset l$ - плоскость α включает линию l.

3. $\cap$ - пересечение. Например, $A=l \cap k$ - точка A есть пересечение линий l и k.

4. $\cup$ - объединение. Например, $C=A \cup B$ - множество C есть объединение множеств A и B.

5. $\|$ -параллельность. Например, $l \| k$- прямые l и k параллельны.

6. $\perp$ - перпендикулярность. Например, $\alpha \perp \beta$ - плоскости α и β перпендикулярны.

Обозначение метрических отношений между геометрическими фигурами или их образами:

1. /AB/, /φ/ - расстояние между точками A и B, действительная величина отрезка, действительная величина угла.

2. = - равны, совпадают (не равны). Например,/AB/=/CD/- длины отрезков равны.

Раздел I. ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема 1. МЕТОД ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Центральное, параллельное, прямоугольное проецирование.

Центральной проекцией точки A (рис.1) называют точку A^0 пересечения проецирующей прямой A^0S с плоскостью проекций π_0, причем проецирующая прямая проходит через точку A пространства в некоторую точку S - центр проекций.

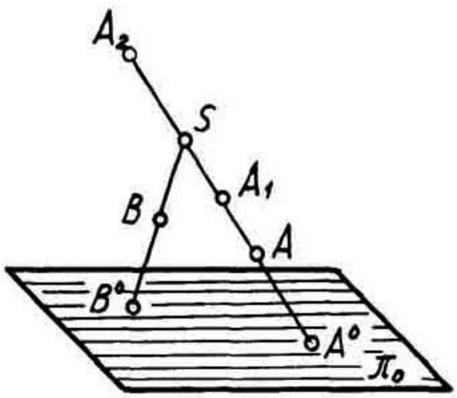


Рис.1

В общем случае должно иметь место A не совпадает с S , $S \notin \pi_0$. При заданном аппарате проецирования (π_0, S) каждая точка пространства имеет только одну центральную проекцию (рис.1). Однако одна центральная проекция не даёт возможности судить о положении точки в пространстве. Действительно, на рис.1 видно, что точка A^0 является проекцией любой точки A, A_1, A_2, ... принадлежащей проецирующей прямой A^0S. Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две её центральные проекции, полученные из двух различных центров (рис.2).

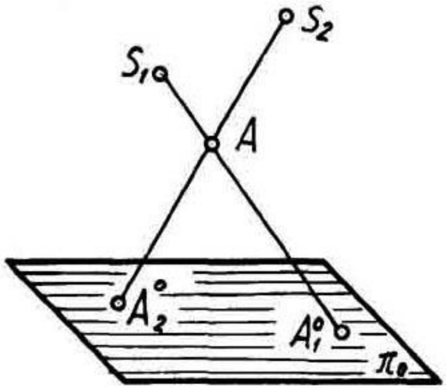


Рис.2

Совокупность проецирующих прямых при заданных π_0 и S образует коническую поверхность, поэтому центральную проекцию называют также конической (рис.3).

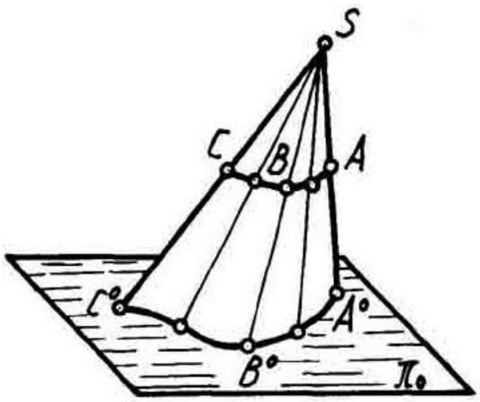


Рис.3

Параллельной проекцией точки A (рис.4) называют точку A^0 пересечения с плоскостью проекций π_0, проецирующей прямой AA^0, проходящей через точку A пространства, параллельно заданному направлению S.

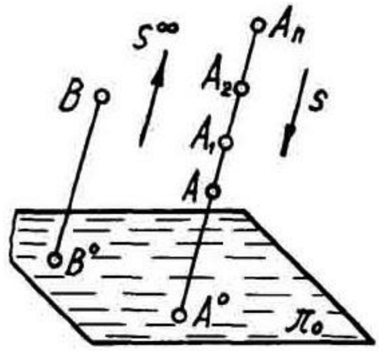


Рис.4

Параллельная проекция является частным случаем центральной проекции, когда центр проекций находится в бесконечности. Проецирующие лучи в этом случае параллельны между собой. При заданном аппарате проецирования (π_0, S) каждая точка пространства имеет только одну параллельную проекцию (см. рис.4), которая не определяет ее положения в пространстве; точка A^0 (см. рис.4) может быть проекцией любой точки: A, A_1,.., A_n, принадлежащей проецирующей прямой A^0A_n. Для определения положения точки B пространстве необходимо иметь две ее параллельные проекции, полученные на одну или две плоскости при двух различных направлениях проецирования (рис.5).

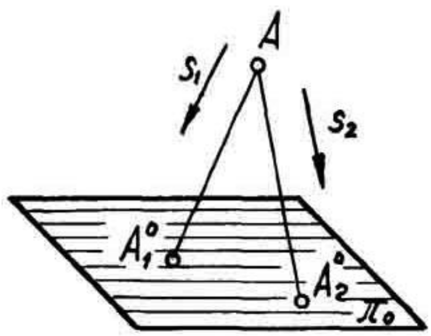


Рис.5

Совокупность проецирующих прямых образует цилиндрическую поверхность, поэтому параллельную проекцию называют также цилиндрической (рис.6).

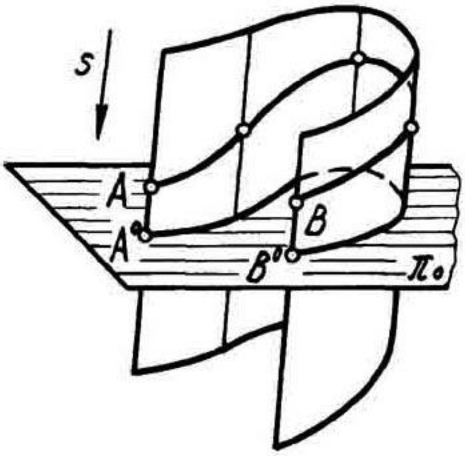


Рис.6

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций $S \perp \pi$ называется прямоугольным или ортогональным (рис.7).

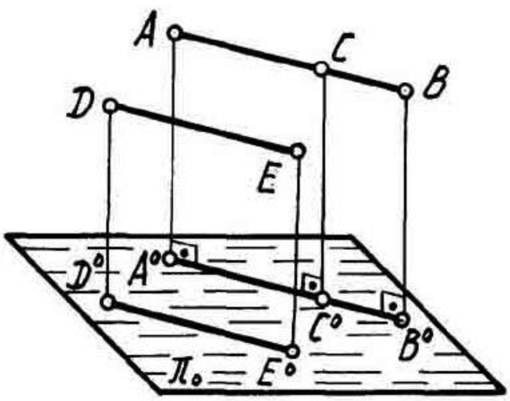


Рис.7

При ортогональном проецировании построение изображения отличается простотой, а при определенных условиях, на проекциях сохраняется форма и размеры элементов проецируемых фигур. Это обусловило широкое распространение ортогональных проекций в инженерных чертежах.

Основные свойства.

Геометрические фигуры в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением. При параллельном проецировании искажаются линейные и угловые величины. Наряду с этим между оригиналом и его проекцией существует определенная связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства оригинала сохраняются в на его проекции. Такие свойства называют инвариантными (независимыми) для данного способа проецирования. При параллельном проецировании можно выделить ряд таких свойств:

1. Проекция прямой линий в общем случае есть прямая. Действительно, проецирующей поверхностью в этом случае будет плоскость ABB^0A^0 (рис.8), которая пересекается с плоскостью проекций π_0, по прямой линии A^0B^0.

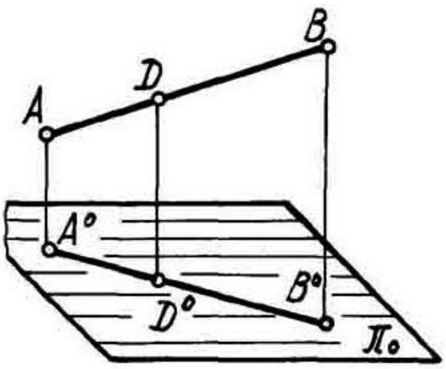


Рис.8

В частных случаях:

- если направление прямой линии совпадает о направлением проецирования, то проекцией прямой будет точка;

- если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то он проецируется без искажения (см. рис.7).

Из свойства следует, что плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется без искажения (рис.9).

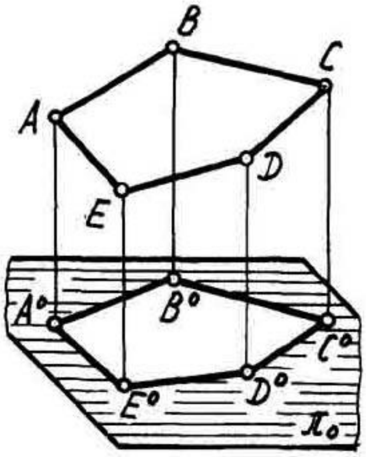


Рис.9

2. Если точка принадлежит линии, то проекция этой точки принадлежит проекции линии (см. рис.7, рис.8).

Из приведенных свойств следует:

- если прямые в пространстве пересекаются, то точка пересечения их проекций является проекцией точки пересечения прямых (см. рис.9);

- плоский многоугольник (ломаная линия) в общем случае проецируется в многоугольник (ломаную линию) с тем же числом вершин (см. рис.9).

3. Проекции параллельных прямых параллельны.

Действительно, в этом случае проецирующие плоскости параллельны, и они пересекаются с плоскостью проекций по параллельным прямым (см. рис.7).

4. Если отрезок делится точкой в некотором отношении, то проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же отношении (см. рис.8). Пропорциональность отрезков и их проекций следует из обобщенной теоремы Фалеса.

Из двух последних свойств вытекает:

- середина отрезка проецируется в середину его проекции;

- отношение длин отрезков параллельных пряных равно отношению их проекций.

Применительно к ортогональным проекциям можно отметить еще следующие два свойства.

5. Если две прямые взаимно перпендикулярны и одна из них параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна этой плоскости, то проекции этих прямых перпендикулярны (рис.10).

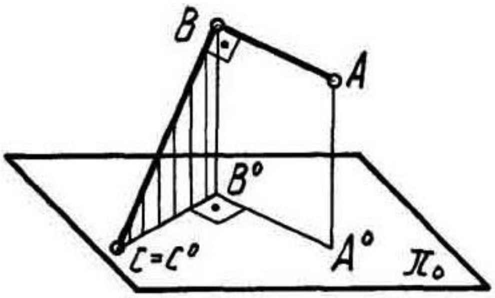


Рис.10

Если $AB \perp BC$ и $AB \| \pi_0$, то $A^0B^0 \perp B^0C^0$.

Действительно, $AB \perp BC$ и $AB \perp BB^0$. Следовательно, $AB \perp$ пл. BC^0B^0.

Но $AB \| A^0B^0$, значит $A^0B^0 \perp$ пл. BC^0B^0 и $A^0B^0 \perp B^0C^0$.

6. Действительная величина отрезка может быть определена как гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого - проекция отрезка на плоскость, второй катет - разность расстояний концов отрезка до этой плоскости. Угол φ в этом треугольнике между отрезком и его проекцией - действительная величина угла наклона отрезка к плоскости проекций (рис.11).

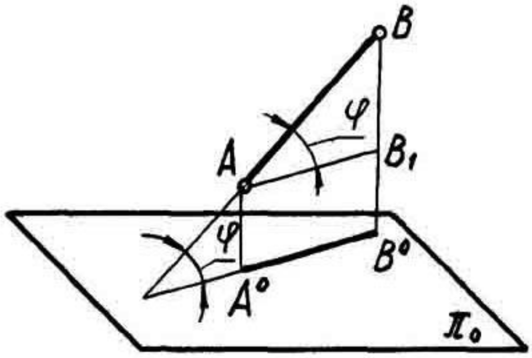


Рис.11

Образование чертежа. Обратимость чертежа. Аксонометрические проекции (основные понятия).

Одна параллельная проекция не определяет форму и положение геометрического образа в пространстве. Например, проекцию точки можно рассматривать как проекцию множества точек, расположенных на проецирующем луче; проекция в виде отрезка прямой может быть проекцией прямой линии, плоской ломаной или кривой линии, плоской фигуры (рис.12).

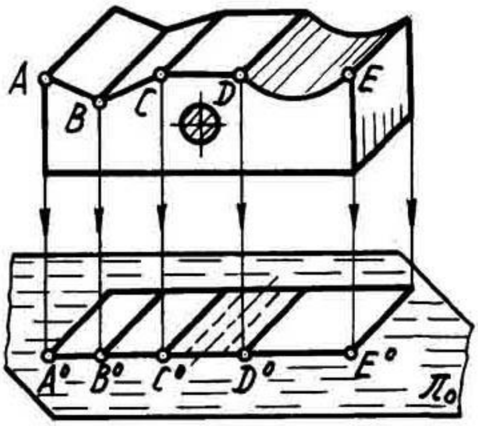


Рис.12

Для того, чтобы по изображению предмета можно было определить его форму и расположение, проекция его должна содержать дополнительные данные. В инженерной практике нашли распространение следующие основные способы дополнения проекции:

1. Проекции с числовыми отметками . Метод основан на том, что все точки геометрического образа в пространстве ортогонально проецируются на плоскость проекций - плоскость нулевого уровня. Удаление точек от этой плоскости проекций указывают числовыми отметками, расположенными возле проекций точек. Если точка расположена выше плоскости проекций, то ее отметка положительная, если ниже - отрицательная (рис.13).

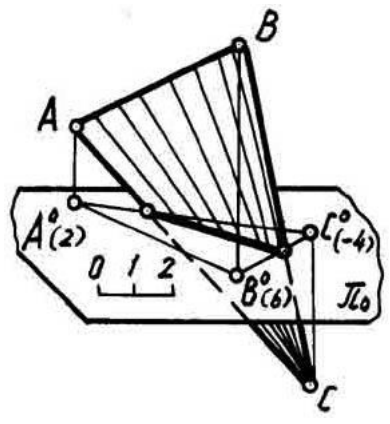


Рис.13

Проекции с числовыми отметками применяются в топографии, для проектирования гидротехнических, дорожных сооружений и др.

2. Проекции академика Федорова Е.С. По этому методу расстояние точки от плоскости проекций изображают при помощи параллельных отрезков (векторов), начало которых совпадает с ортогональными проекциями соответствующих точек. Длина такого высотного отрезка равна расстоянию соответствующей точки от плоскости проекций (рис.14).

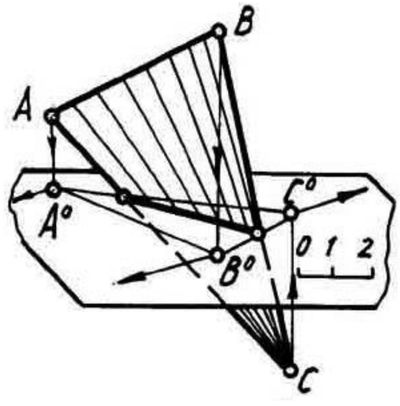


Рис.14

Направление всех высотных отрезков выбирают произвольно, но они должны быть параллельны между собой. Положительные и отрицательные высотные отрезки имеют противоположное направление.

3. Аксонометрические проекции. Сущность способа проецирования состоит в том, что фигура вместе с осями прямоугольных координат, к

которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируется на некоторую плоскость (рис.15).

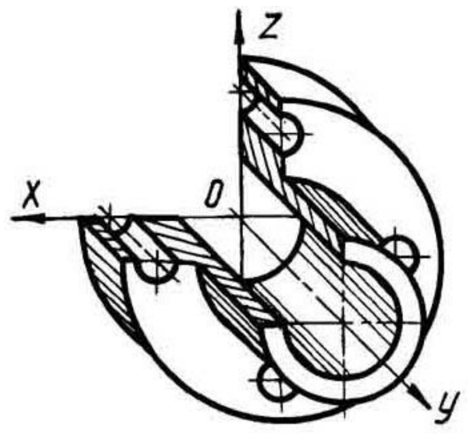


Рис.15

Основное преимущество проекций - наглядность изображения.

4. Ортогональные проекции на взаимно перпендикулярные плоскости (рис.16).

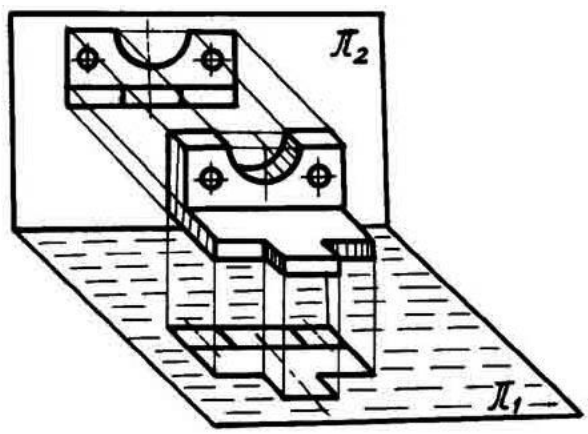


Рис.16

Способ является основным при выполнении технических чертежей, так как обладает простотой исполнения и позволяет в ряде случаев изображать геометрические элементы без искажений. Способ был впервые систематизирован французским ученым Гаспаром Монжем (1746-1818).

Вместе с тем чертежи, построенные по этому способу, страдают недостаточной наглядностью.

Тема 2. ЧЕРТЕЖИ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Точка. Изображение на чертеже. Прямоугольные координаты точки.

Для определения положения точки по ее ортогональным проекциям необходимо иметь две проекции точки на непараллельных плоскостях проекций. Для удобства построения и чтения изображений плоскости проекций располагают в этом случав взаимно перпендикулярно (рис.17).

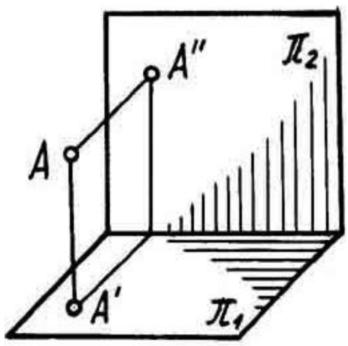


Рис.17

Для изображения более сложных геометрических образов проекции на две плоскости могут оказаться недостаточными. В общем случае прибегают к проекциям на три взаимно перпендикулярные плоскости и на плоскости, им параллельные. Т.е. геометрический образ предполагают находящимся внутри пустотелого куба и спроецированным на шесть его граней.

Для описания схемы построения чертежа можно рекомендовать следующую геометрическую модель. Две точки принимаются за начало отсчета O_1 и O_2. Из точек исходят по три взаимно перпендикулярные координатные оси, имеющие попарно противоположное направление x и -x, y и -y, z и -z (рис.18).

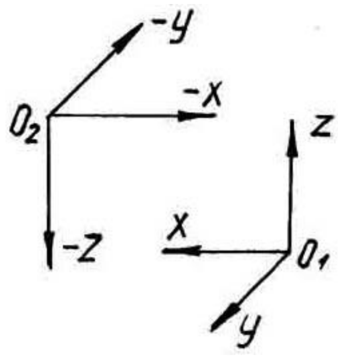


Рис.18

Координатные оси можно принять за ребра куба, а координатные плоскости $x0_1y$, $x0_1z$ и т.д. за грани куба - плоскости проекций (рис.19).

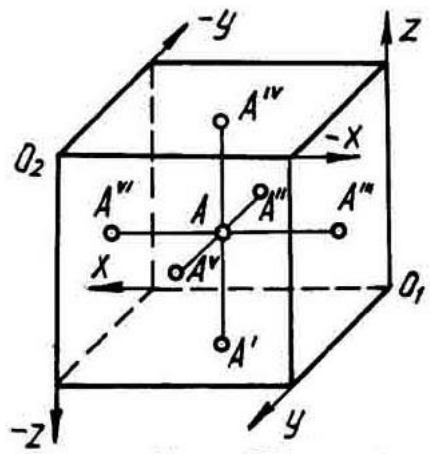


Рис.19

Такая математическая пространственная модель, как и линейная или плоская, может быть принята для описания многих процессов естествознания, существующих в ограниченных пределах. Совпадение точек отсчета O_1 и O_2 приводит к декартовой геометрической модели.

Шесть граней куба называют основными плоскостями проекций. Для образования чертежа (по методу Г. Монжа) полученные на гранях куба (основных плоскостях проекций) проекции совмещают с одной плоскостью - плоскостью чертежа.

Принятый по ГОСТ 2.305-68 порядок совмещения показан на (рис.20).

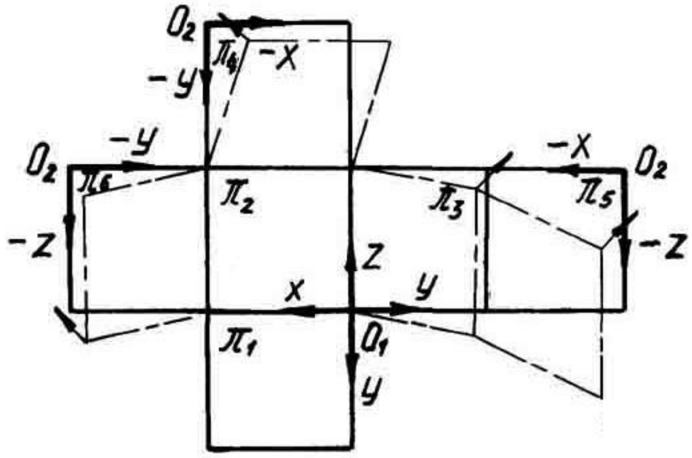


Рис.20

Основную плоскость проекций π_2 (вертикальную грань куба, совпадающую с плоскостью чертежа) называют фронтальной плоскостью проекций.

Горизонтальную грань куба $\pi_1 \perp \pi_2$ называют горизонтальной плоскостью проекций.

Вертикальную грань $\pi_3 \perp \pi_2 \perp \pi_1$ - профильной плоскостью проекций.

Основные плоскости проекции π_4, π_5, π_6 - совмещенные с плоскостью чертежа грани куба, параллельные соответственно граням - π_1, π_2, π_3.

Чертеж точки на двух, трех и шести основных плоскостях проекций показан на рис.21, рис.22, рис.23.

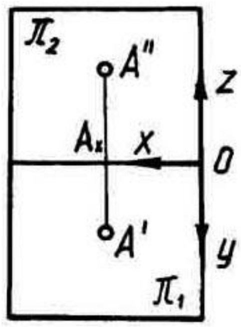


Рис.21

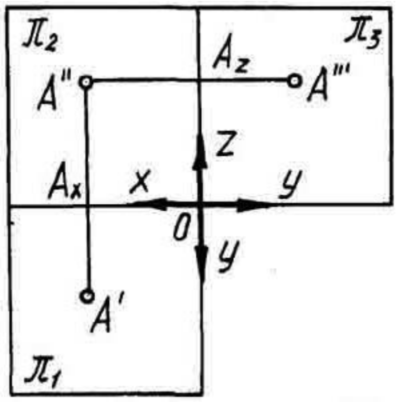


Рис.22

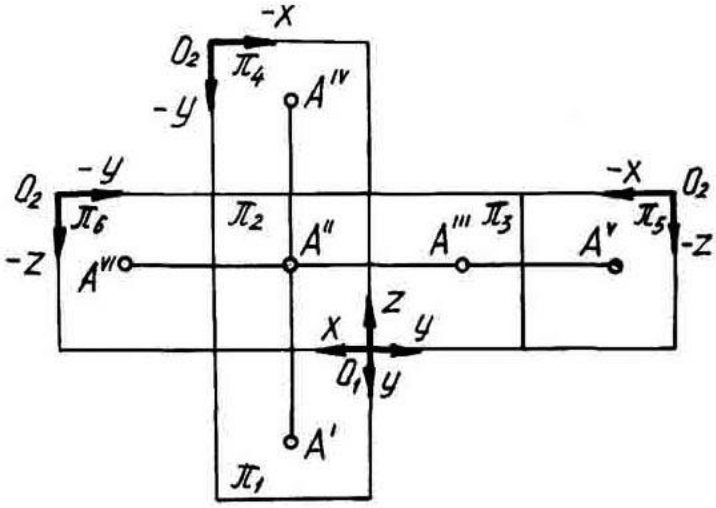


Рис.23

Проекция точки на плоскость π_2 - фронтальная проекция, на плоскость π_1 - горизонтальная проекция, на плоскость π_3 - профильная проекция.

Прямые линии A'A", A"A'" и т.д., связывающие проекции точки, называют линиями связи. Линии связи перпендикулярны соответствующим осям проекций.

Отрезки $A'A_x$, $A''A_x$, $A''A_z$, $A'''A_z$ и т.д. (см. рис.22), определяющие расстояние точки до соответствующей плоскости проекций, являются ее координатами в геометрической системе (см. рис.19). Одна и та же точка в системе может быть задана различными комбинациями координат (координаты могут иметь различные знаки и величину в зависимости от того, удаление от какой плоскости координат они задают). Каждая проекция точки (см. рис.21, рис.22, рис.23) может быть задана четырьмя различными комбинациями двух координат.

Имея чертеж точки, можно записать ее координаты в пространстве относительно любой тройки координатных плоскостей.

На инженерных чертежах оси проекций не изображают, такие чертежи называют безосными. В настоящем курсе будут применяться преимущественно чертежи без указания осей проекций. В отдельных случаях будут использованы чертежи с указанием осей.

Таким образом, будем считать, что чертеж - это изображение на одной плоскости нескольких взаимосвязанных ортогональных проекций геометрического образа, дающее полное представление о форме, расположении и величине всех его элементов.

Количество проекций должно быть минимальным, но достаточным.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двух- или трех-проекционных чертежей.

Прямая. Задание и изображение на чертеже. Следы прямой. Взаимное положение двух прямых. Теорема о проецировании прямого угла.

Прямая линия определяется двумя точками, поэтому на чертеже всякая прямая может быть задана проекциями двух ее точек (рис.1.27а, б).

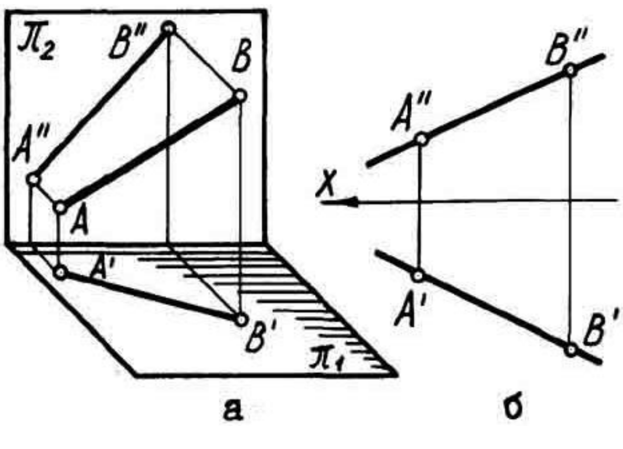


Рис.1.27

На рис.1.27 отрезок АВ, определяющий прямую, занимает произвольное (общее) положение по отношению к плоскостям проекций.

Отрезок не параллелен ни одной из плоскостей проекций. Такая прямая называется прямой общего положения.

Проекции всегда меньше длины отрезка.

Прямые линии относительно плоскостей проекций могут занимать частные положения:

- параллельное плоскости проекций;

- перпендикулярное плоскости проекций.

Прямые, параллельные плоскости проекций: горизонтальная прямая, фронтальная прямая, профильная прямая.

Горизонтальная прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций (рис.1.28а, б).

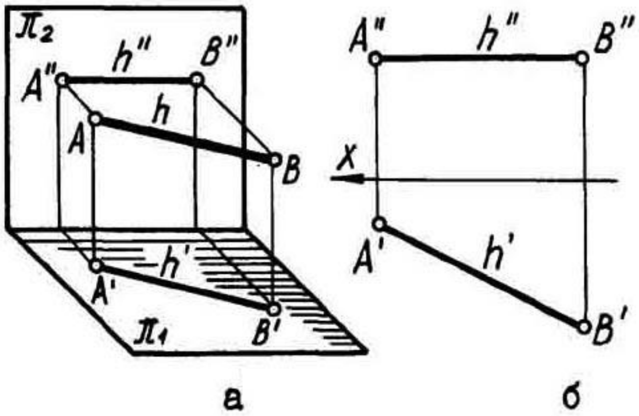


Рис.1.28

Для любой горизонтальной прямой $h''\|x$, $h'''\|y$, $|A'B'|=|AB|$.Угол, составленный ее горизонтальной проекцией с осью x, конгруэнтен углу наклона прямой в пространстве к плоскости π_2.

Фронтальная прямая параллельна фронтальной плоскости проекций (рис.1.29).

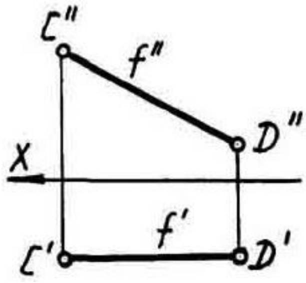


Рис.1.29

В этом случае f'||x, f'''||z, |C''D''|=|CD|. Угол между f'' и осью x конгруэнтен углу наклона прямой к плоскости π_1.

Профильная прямая параллельна профильной плоскости проекций (рис.1.30а, б).

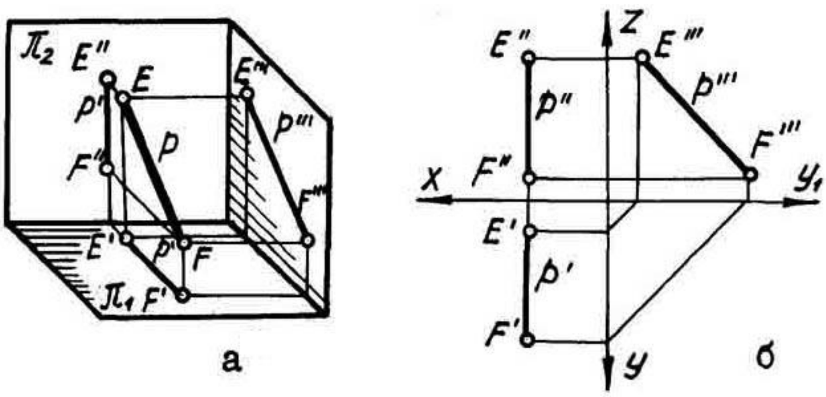


Рис.1.30

В этом случае p'||y, p''||z, |E'''F'''|=|EF|. Углы, составляемые p''' с осями y и z, конгруэнтны углам наклона прямой к плоскостям π_1 и π_2. Профильную прямую в системе π_1/π_2 следует задавать отрезком, указывая на чертеже его конечные точки.

Чертеж прямой, принадлежащей плоскости проекций π_1, показан на рис.1.31.

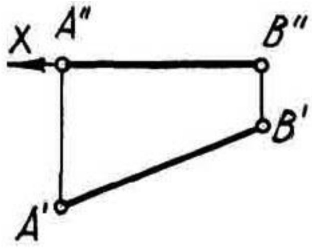


Рис.1.31

Фронтальная проекция в этой случае совпадает с осью x.

Прямая, перпендикулярная плоскости проекций - проецирующая прямая.

Горизнтально-проецирующая прямая - прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $l \perp \pi_1$. У такой прямой l' - точка, l" и l''' - прямые ||z (рис.1.32а, б).

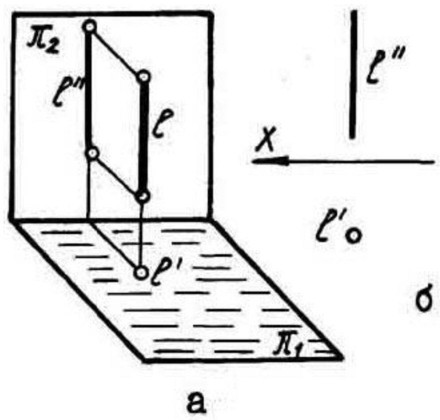


Рис.1.32

На плоскости π_2 и π_3 отрезок прямой проецируется без искажения.

Фронтально проецирующая прямая - прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $m \perp \pi_2$. У такой прямой m" - точка, m' и m''' - прямые ||y (рис.1.33а, б).

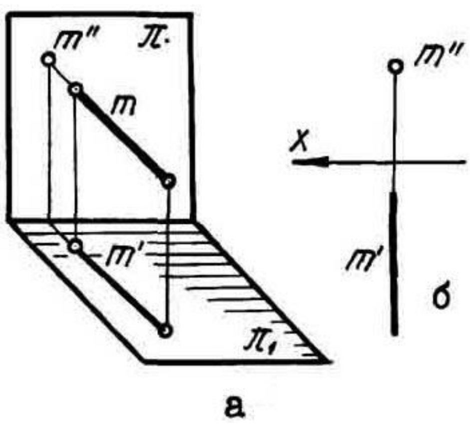


Рис.1.33

Профильно-проецирующая прямая - прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций $n \perp \pi_3$. У такой прямой n''' - точка, n'' и n'||x (рис.1.34а, б).

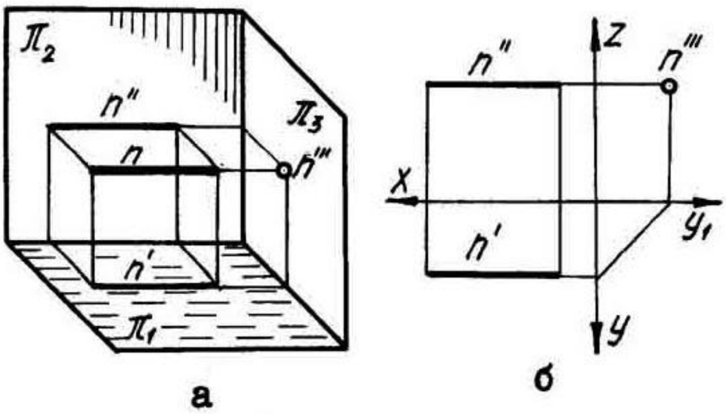


Рис.1.34

Проиллюстрируем некоторые свойства ортогональных проекций на чертеже прямой линии:

- если точка принадлежит прямой и дана одна из проекций этой точки, то другие проекции точки можно найти на одноименных проекциях прямой, проведя линии связи с заданной проекции точки. Для построения проекции точки на профильной прямой можно воспользоваться профильной проекцией отрезка прямой (рис.1.35).

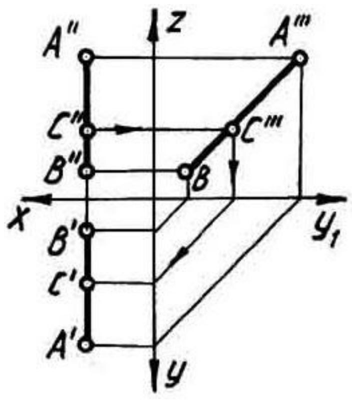


Рис.1.35

Построение видно из чертежа. Недостающую проекцию точки можно также построить пропорциональным делением проекции отрезка. Так, для построения горизонтальной проекции C' точки C (рис.1.36) горизонтальная проекция отрезка разделена в том же отношении, в каком C'' делит фронтальную проекцию.

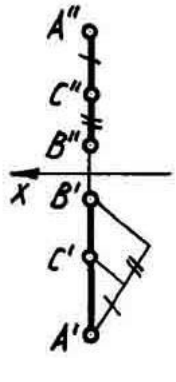


Рис.1.36

- Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции тоже пересекаются и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи (рис.1.37а, б).

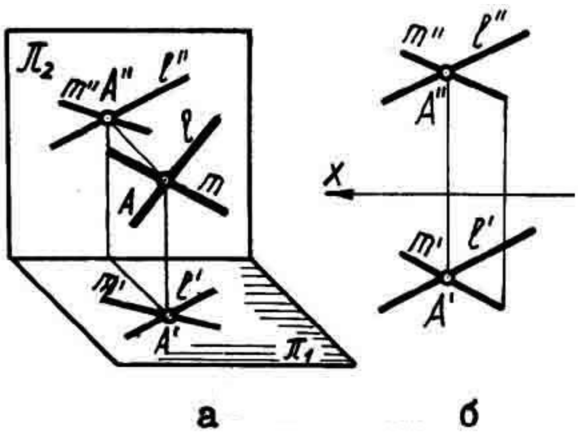


Рис.1.37

Если A=l∩m, то A'=l'∩m', A"=l"∩m" и т.д.

- Если прямые параллельны, то их одноименные проекция тоже параллельны (рис.1.38а, б).

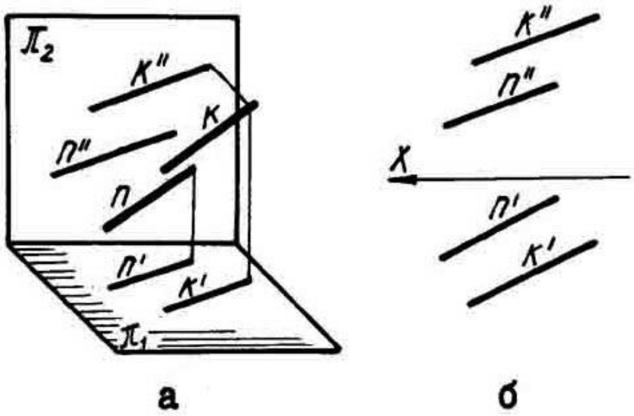


Рис.1.38

Если k||n, то k'||n' и k"||n" и т.д. В общем случае о параллельности прямых в пространстве можно судить по двум проекциям. Если прямые параллельны одной из плоскостей проекций, например, профильной, то судить о их параллельности в пространстве можно при наличии проекций на эту (профильную) плоскость. На рис.1.39а профильные прямые параллельны: A'''B'''||C'''D''', на рис.1.39б - не параллельны, так как A'''B''' не параллельна C'''D'''.

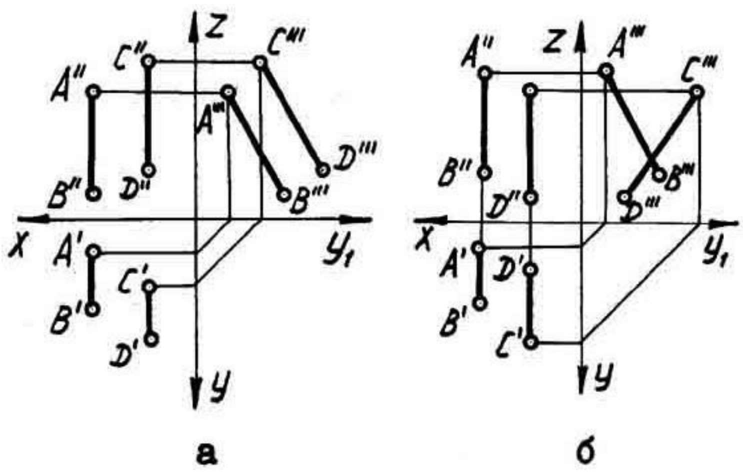


Рис.1.39

- Чтобы разделить отрезок прямой в заданном отношении, достаточно разделить в этом отношении любую из проекций, а затем найти вторую проекцию точки, делящей отрезок (рис.1.40).

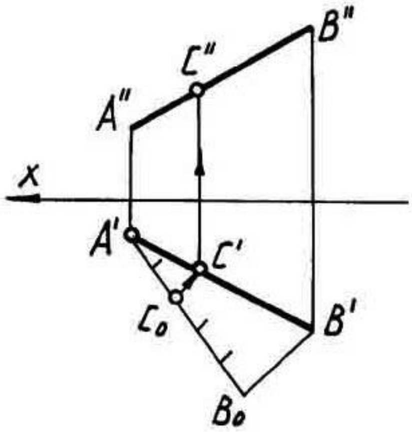


Рис.1.40

- Чтобы определить действительную длину отрезка АВ и углы наклона его к плоскостям проекций, строят прямоугольный треугольник по двум катетам (рис.1.41а, б).

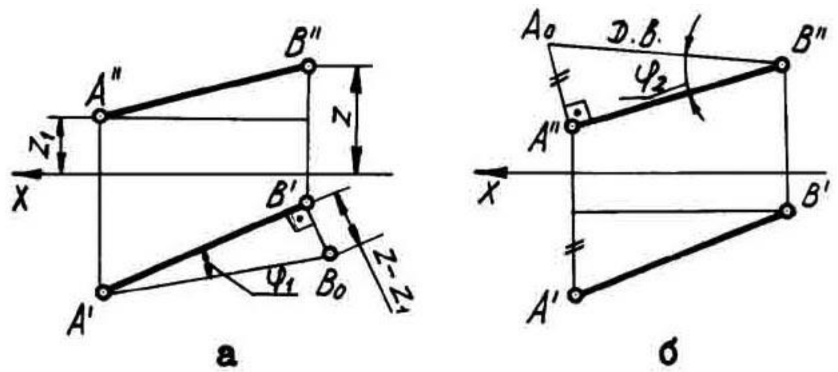


Рис.1.41

За один катет принимают, например, горизонтальную проекцию (A'B') отрезка, а за другой катет - отрезок, длина которого равна (z-z_1). Гипотенуза прямоугольного треугольника - действительная длина отрезка. Тот же результат получим, построив прямоугольный треугольник на фронтальной проекция отрезка. Угол φ_1, является углом наклона данной прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол φ_2 - угол наклона той же прямой к фронтальной плоскости проекций.

- Чтобы определить расстояние от точки C до горизонтальной прямой (рис.1.42), используют свойство 5.

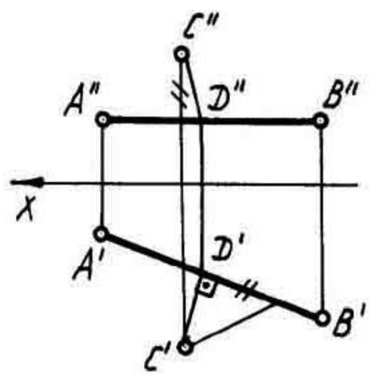


Рис.1.42

Опускают из точки C (C', C'') перпендикуляр на прямую AB (A'B', A''B'') и находят его основание D (D', D''). Для решения задачи на чертеже проводят через точку C прямую, перпендикулярную A'B'. Точка D (D', D'') - основание перпендикуляра. После этого определяют действительную длину перпендикуляра.

Для определения положения прямой относительно плоскостей проекций удобно пользоваться следами. Следом прямой будем называть точку встречи ее с основной плоскостью проекций. Прямая линия при ее продолжении пересекает две основные плоскости проекций, т.е. прямая имеет два следа (рис.1.43а, б).

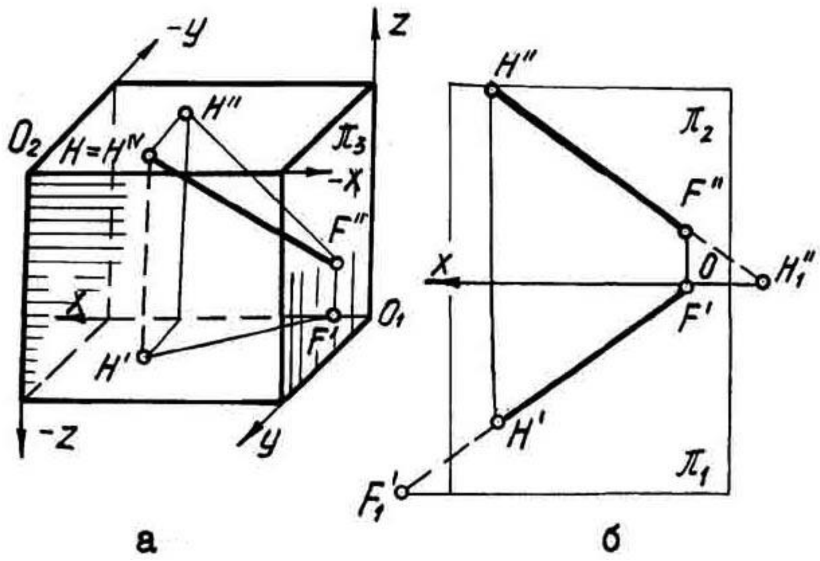


Рис.1.43

Следует иметь в виду, что при решении задачи на нахождение следов, плоскости проекций на чертеже должны быть ограничены.

В зависимости от того, с какой из основных плоскостей проекций происходит встреча прямой, различают:

- H - горизонтальный след, если прямая встречает одну из горизонтальных плоскостей проекций π_1 или π_4;

- F - фронтальный след, если прямая встречает одну из фронтальных плоскостей проекций π_2 или π_5;

- P- профильный след, если прямая встречает плоскость π_3 или π_6.

Прямая может иметь оба одноименных следа. Для построения проекций горизонтальных следов необходимо:

1) фронтальную проекцию прямой продлить до пересечения с границами плоскости π_2 вдоль оси x и отметить точками H'', H''_1;

2) найти горизонтальные проекции H' и H'_1 этих точек прямой. Если обе проекции точки H или H_1 лежат в пределах одноименных плоскостей проекции, то эта точка является горизонтальным следом прямой.

Для построения фронтальных следов необходимо:

1) горизонтальную проекцию прямой продлить до пересечения с границами плоскости π_1, вдоль оси x и отметить точки F', F'_1;

2) найти фронтальные проекции этих точек (F'', F''_1). Если обе проекции точки F или F_1, лежат в пределах одноименных плоскостей проекций, то эта точка является фронтальным следом прямой. Ограничимся построением следов на двух-проекционном чертеже.

§6. Изображение на чертеже кривых линий

Линия - это траектория перемещающейся точки на плоскости или в пространстве. Линию также рассматривают как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек.

Кривые линии разделяются на плоские и пространственные. Все точки плоских кривых линий принадлежат одной плоскости. Точки пространственной кривой линии не лежат в одной плоскости.

Линия считается закономерной, если в своем образовании она подчинена какому-либо закону. Закономерные линии могут быть алгебраические - описываемые алгебраическими уравнениями, и трансцендентные - описываемые трансцендентными уравнениями. Порядок линии определяется порядком ее уравнения.

Геометрически порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой, лежащей в плоскости кривой, а пространственной кривой - наибольшим числом точек пересечения ее с плоскостью.

Примерами распространенных в технике пространственных кривых линий являются винтовые (рис.1.44), линии взаимного пересечения кривых поверхностей (рис.1.45) и др.

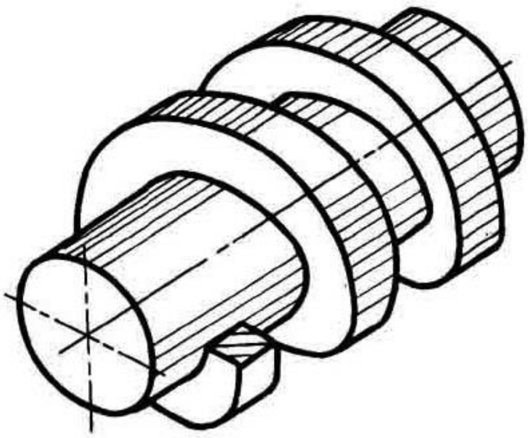


Рис.1.44

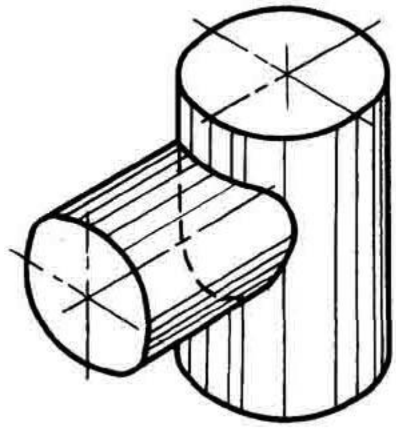


Рис.1.45

Из плоских кривых линий широко распространены линии, получаемые при сечении прямого кругового конуса плоскостями (рис.1.46).

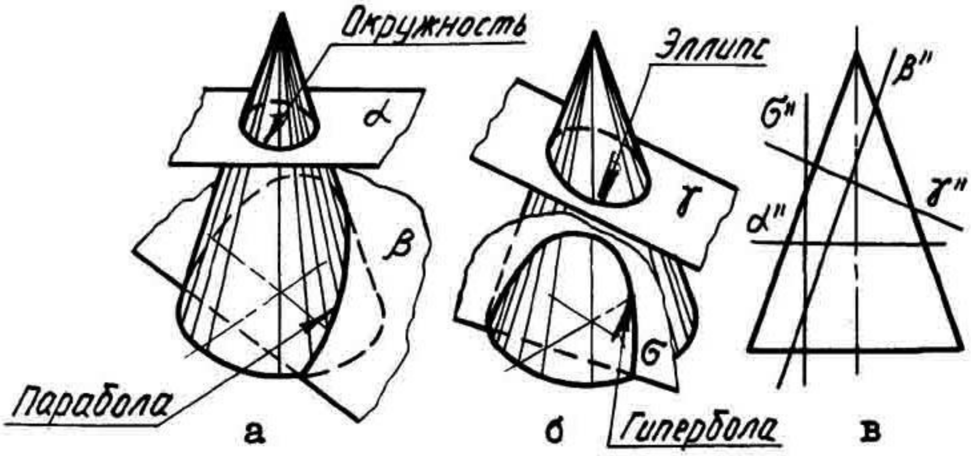


Рис.1.46

В сечении может быть получена:

- окружность, если секущая конус плоскость α перпендикулярна оси конуса (рис.1.46а, в);

- эллипс, если секущая конус плоскость γ пересекает все образующие (рис.1.46б, в);

- гипербола, если секущая конус плоскость σ параллельна двум образующим конуса (см. рис.1.46б, в);

- парабола, если секущая конус плоскость β параллельна одной образующей конуса (см. рис.1.46а, в).

Для построения проекций кривой необходимо построить проекции ряда принадлежащих ей точек. На рис.1.47 дано пространственное изображение плоской кривой в системе π_1/π_2 и ее чертеж.

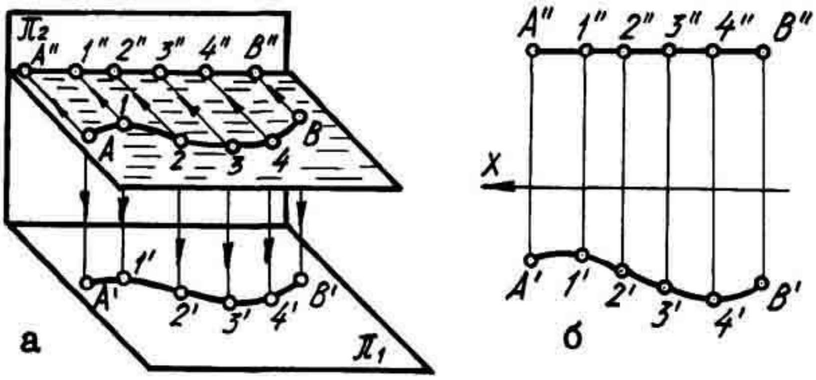


Рис.1.47

Кривая лежит в плоскости, параллельной плоскости π_1.

Изображение пространственной кривой дано на рис.1.48.

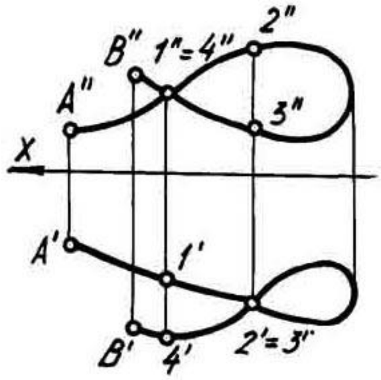


Рис.1.48

Как видно из рисунков, плоская кривая проецируется в виде плоской кривой или в виде прямой линии, если кривая расположена в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций. Пространственная кривая всегда проецируется в виде кривой линии.

Кривая, представляющая собой ортогональную проекцию кривой некоторого порядка, сохраняет тот же порядок или является кривой более низкого порядка. Эллипс и окружность проецируются в эллипс или, в частном случае, в окружность, проекция параболы - парабола, проекция гиперболы - гипербола.

У плоских кривых секущая и касательная к кривой линии проецируется в общем случае в секущую и касательную к ее проекциям.

Бесконечно удаленные точки плоской кривой проецируются в бесконечно удаленные точки ее проекций.

Для определения длины какого-либо участка кривой необходимо вписать в кривую ломаную линию и определить длину каждого ее звена.

На рис.1.49 даны две проекции пространственной кривой l.

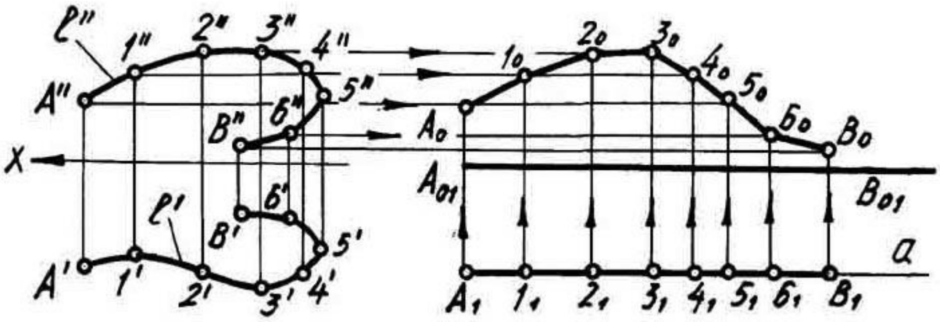


Рис.1.49

Для определения ее длины, например, на горизонтальной проекции l' намечен ряд точек 1', 2', 3'... так, чтобы дуги, заключенные между этими точками, мало отличались по длине от стягивающих их хорд. На горизонтальной прямой а отложены в той же последовательности, как на проекциях длины хорд. Из точек A_1, 1_1, 2_1... восстановлены перпендикуляры до пересечения с горизонтальными прямыми, проведенными через соответствующие фронтальные проекции точек A", 1", 2", 3"... Полученные точки являются вершинами ломаной линии, выпрямлением которой получен отрезок $|A_{01}B_{01}|$, равный длине пространственной кривой.

Цилиндрическая винтовая линия - это пространственная спиральная кривая, располагавшаяся на поверхности кругового цилиндра и пересекающая все его образующие под одним и тем же углом. Ее можно рассматривать как траекторию точки поверхности прямого кругового цилиндра, которая вращается вокруг оси и одновременно перемещается вдоль этой оси, причем продольные перемещения пропорциональны угловым. Полученную таким способом цилиндрическую линию называют гелисой.

Осью и радиусом винтовой линии будут ось и радиус цилиндра, поверхности которого принадлежит винтовая линия. Отрезок винтовой линии между ближайшими точками на образующей называется витком. Кроме того, цилиндрическая винтовая линия характеризуется ходом и шагом. Ход цилиндрической винтовой линии - это расстояние между начальной и конечной точками витка, измеренное вдоль образующей цилиндра. Шаг - это расстояние между смежными витками, также измеренное вдоль образующей цилиндра.

На рис.1.50 показано построение проекций винтовой линии, ось которой расположена перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

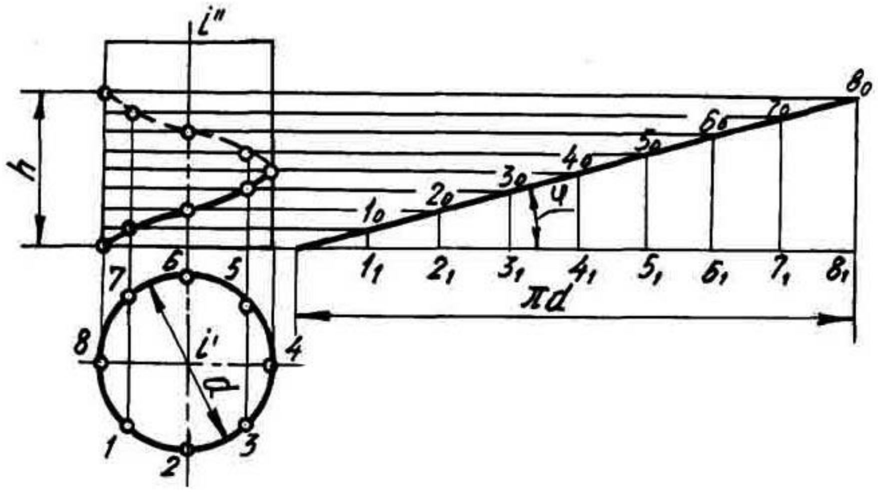


Рис.1.50

В этом случае горизонтальная проекция винтовой линия будет окружностью. Для построения фронтальной проекции делим окружность на некоторое количество равных частей, например, на восемь, и, задавшись определенной величиной шага h винтовой линии, делим шаг на то же число равных частей. В пересечении соответствующих горизонтальных и вертикальных прямых получим фронтальные проекции точек винтовой линии.

Если спрямить горизонтальные проекции винтовой линии и провести через точки прямые, параллельные линиям связи, на которых отложить относительные высоты соответствующих точек винтовой линии, получим прямую. Угол наклона φ этой прямой называется углом наклона винтовой линии.

Построение проекций окружности.

Если плоскость, в которой расположена окружность, не параллельна плоскости проекций, то проекцией окружности будет эллипс. При этом любая пара взаимно перпендикулярных диаметров окружности проецируется парой сопряженных диаметров эллипса. Проекция окружности на плоскость π_0, представлена на рис.1.51.

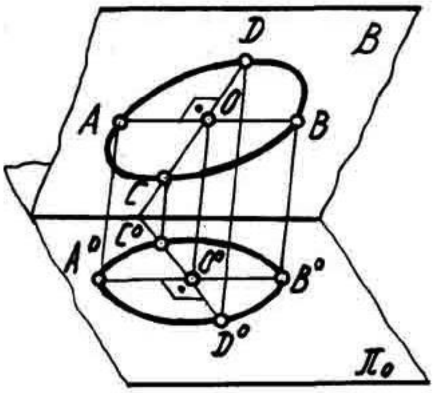


Рис.1.51

Один из диаметров окружности (на рисунке диаметр AB) параллелен плоскости π_0, и проецируется без искажения. Для эллипса A^0B^0 является большой осью. Диаметр окружности $CD \perp AB$. На основании свойства 5 ортогональных проекций его проекция C^0D^0 будет перпендикулярной проекции большой оси A^0B^0. Следовательно, C^0D^0 является малой осью эллипса. По осям A^0D^0 и C^0B^0 может быть построен эллипс.

На рис.1.52 представлены проекции осей окружности, плоскость которой перпендикулярна π_2.

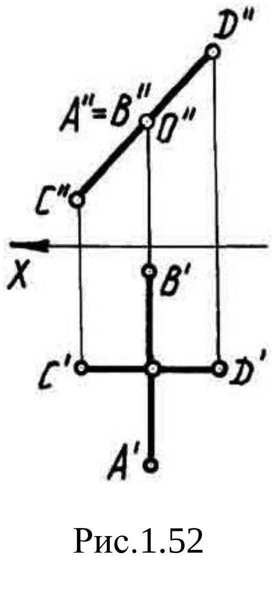


Рис.1.52

В этом случае большая ось эллипса-проекции является фронтально проецирующей прямой, фронтальная проекция A"=B", которой совпадает с фронтальной проекцией центра O" окружности. Горизонтальная проекция

A'B' диаметра окружности AB проецируется без искажения. Диаметр окружности с фронтальной проекцией C''D'' на горизонтальной проекции является малой осью C'D' эллипса. По осям A'D' и C'D' может быть построен эллипс.

§7. Проекции плоскостей общего и частного положения

Положение плоскости в пространстве определяется (рис.1.53):

- тремя точками, не лежащими на одной прямой;

- прямой и не лежащей на ней точкой;

- двумя пересекающимися прямыми;

- двумя параллельными прямыми;

- плоской фигурой.

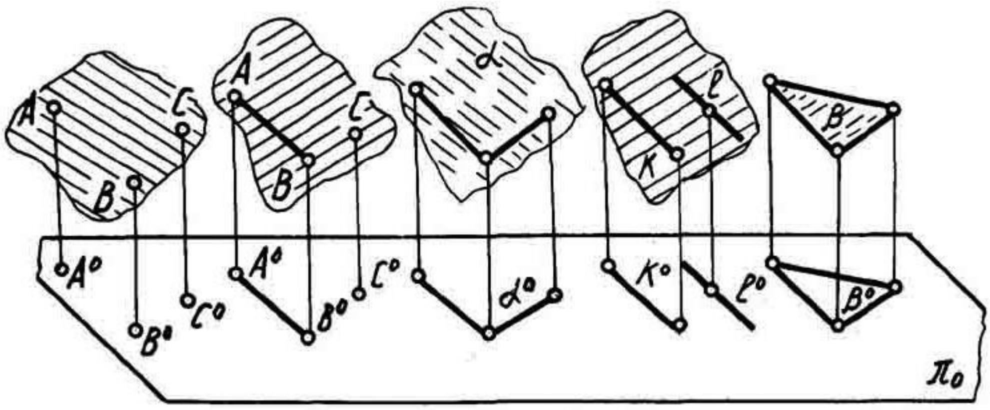


Рис.1.53

Каждый из перечисленных способов задания плоскости можно свести к любому из остальных. На чертеже плоскость может быть задана проекциями перечисленных элементов (рис.1.54).

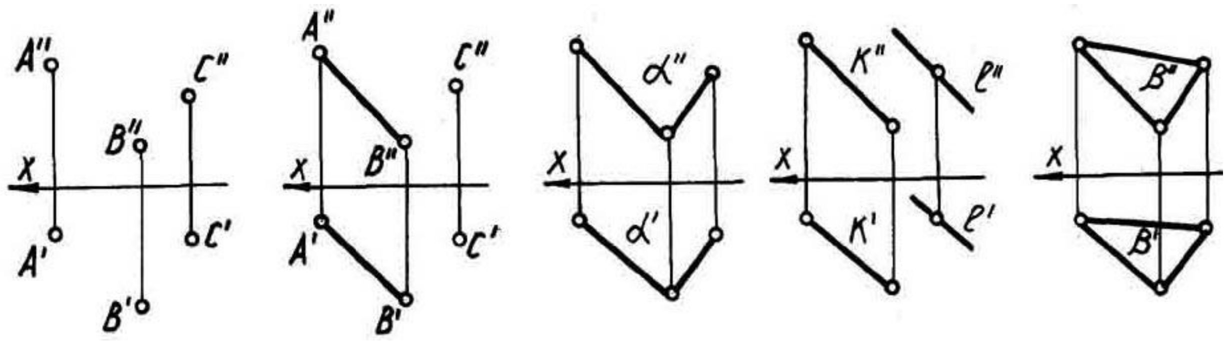


Рис.1.54

Проекции плоскости могут быть обозначены одним из способов, приведенных на рис.1.54.

Плоскость в общем случае пересекает шесть основных плоскостей проекций. Линии, по которым плоскость пересекает плоскости проекций, называют следами плоскости (рис.1.55а, б, в):

- $h_{0\alpha}=\alpha\cap\pi_1,\pi_4$ - горизонтальные следы плоскости α;

- $f_{0\alpha}=\alpha\cap\pi_2,\pi_5$ - фронтальные следы плоскости α;

- $p_{0\alpha}=\alpha\cap\pi_3,\pi_6$ - профильные следы плоскости α.

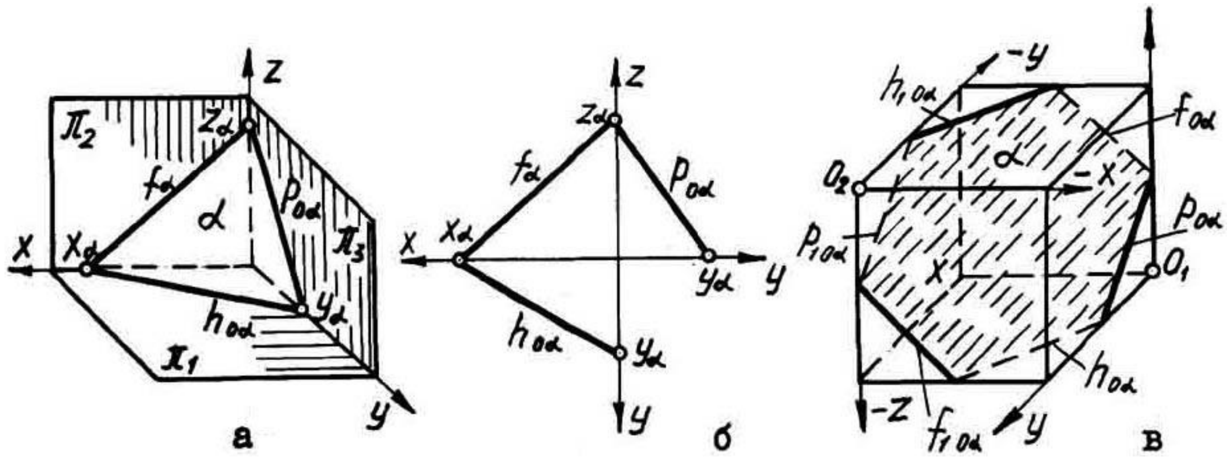


Рис.1.55

Плоскость может быть задана на чертеже проекциями следов (рис.1.55б). При этом проекцию следа, совпадающую с осью проекций, условно не изображают. Точки X_α, Y_α, Z_α - точки схода следов.

Задание плоскости на чертеже следами имеет ряд преимуществ: сохраняется наглядность изображения; для задания плоскости с учетом условностей требуется нанести меньшее количество линий.

Изображенная на рис.1.55 плоскость α занимает общее положение по отношению к плоскостям проекций, так как углы ее наклона к плоскостям проекций произвольные, отличные от 0° и 90°. Такая плоскость называется плоскостью общего положения.

Плоскость может занимать относительно плоскостей проекций частные положения:

- перпендикулярное плоскости проекций;

- параллельное плоскости проекций.

Плоскость, перпендикулярную плоскости проекций, называют проецирующей.

Горизонтально проецирующая плоскость перпендикулярна плоскости проекций π_1 (рис.1.56а, б, рис.1.57).

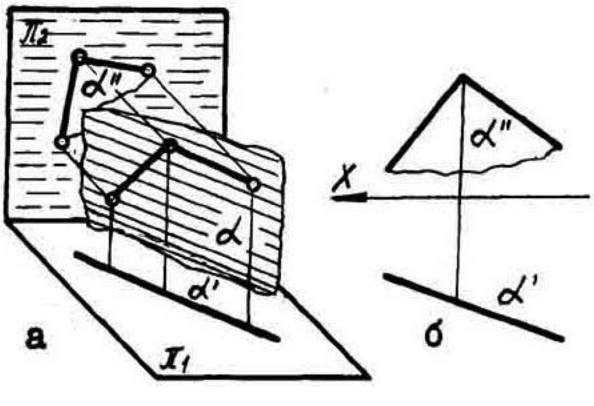


Рис.1.56

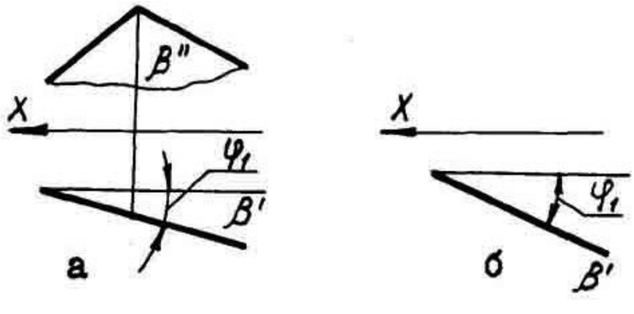


Рис.1.57

Свойства плоскости на чертеже:

- горизонтальные проекции геометрических фигур, принадлежащих плоскости, вырождаются в прямую линию - горизонтальную проекцию или горизонтальный след плоскости;

- угол между горизонтальной проекцией плоскости и осью x конгруэнтен углу наклона плоскости в пространстве к фронтальной плоскости проекций (рис.1.57).

Плоскость вполне определяется и может быть задана одной горизонтальной проекцией (рис.1.57б).

Фронтально проецирующая плоскость перпендикулярна плоскости проекций π_2 (рис.1.58а, б, рис.1.59а, б).

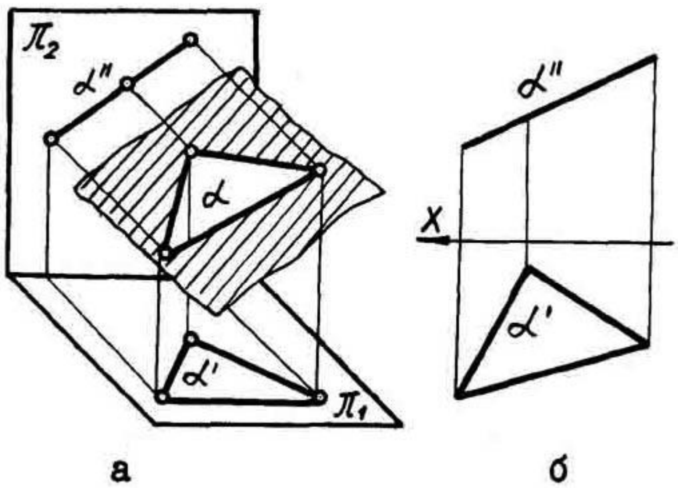


Рис.1.58

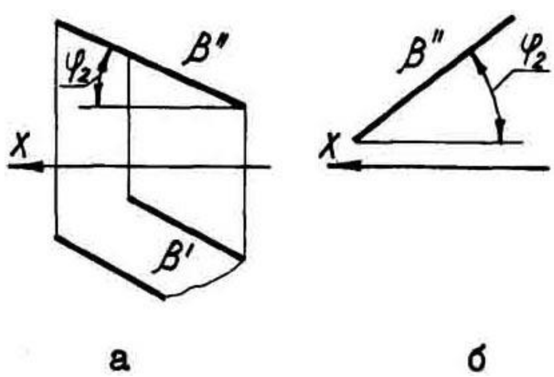


Рис.1.59

Свойства плоскости на чертеже:

- фронтальные проекции геометрических фигур, принадлежащих плоскости, вырождаются в прямую линию - фронтальную проекцию или фронтальный след плоскости;

- угол между фронтальной проекцией плоскости и осью x конгруэнтен углу наклона плоскости в пространстве к фронтальной плоскости проекций (рис.1.59).

Плоскость вполне определяется и может быть задана одной фронтальной проекцией (рис.1.59б).

Профильно-проецирующая плоскость перпендикулярна плоскости проекций π_3 (рис.1.60а, б). Свойства аналогичные.

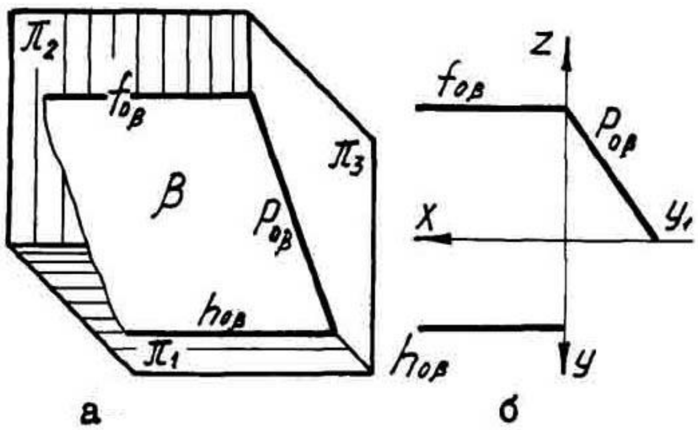


Рис.1.60

Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называют плоскостями уровня.

Горизонтальная плоскость $\beta \| \pi_1$ (рис.1.61).

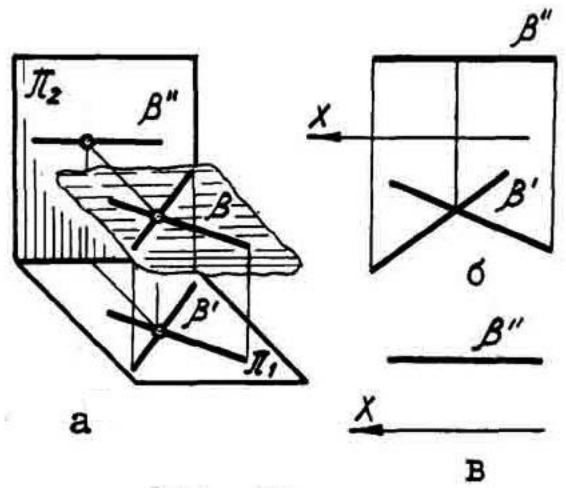


Рис.1.61

Свойства плоскости на чертеже:

- фронтальная проекция любой геометрической фигуры, принадлежащей этой плоскости, вырождается в прямую линию - фронтальную проекцию плоскости или фронтальный след, причем β"||x;

- на горизонтальную плоскость проекций эта фигура проецируется без искажения.

Плоскость может быть задана только фронтальной проекцией (рис.1.61в).

Фронтальная плоскость $\gamma \| \pi_2$ (рис.1.62).

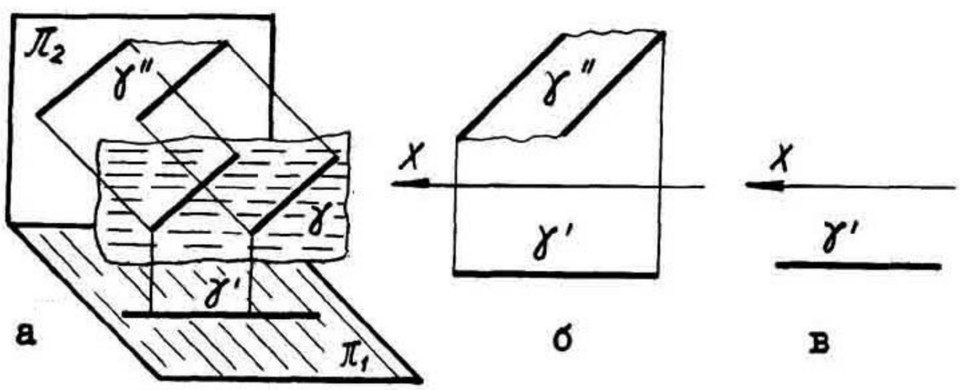


Рис.1.62

Профильная плоскость $\alpha \| \pi_3$ (рис.1.63).

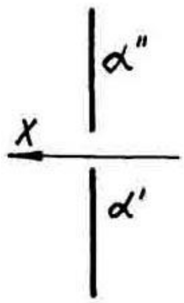


Рис.1.63

Свойства плоскостей на чертеже аналогичные.

§8. Изображение поверхностей вращения и многогранников на чертеже

Поверхности и тела вращения.

Такие поверхности образуются при вращении образующей (прямой линии или плоской кривой) вокруг неподвижной оси. На рис.1.64 изображен чертеж поверхности, полученной вращением образующей АВСД вокруг оси J.

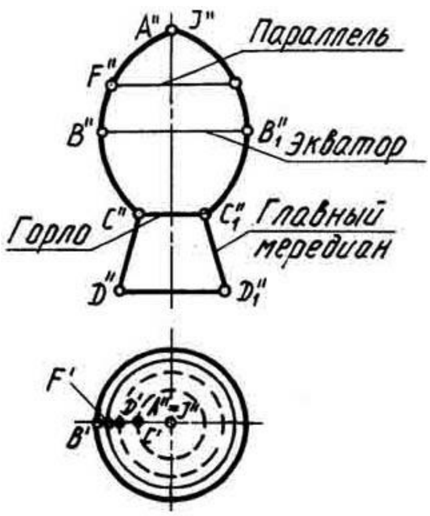


Рис.1.64

Для удобства изображения на чертеже поверхность вращения показывают с осью, расположенной перпендикулярно одной из плоскостей проекций.

При вращении каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются параллелями. Наибольшую из параллелей называют экватором (на рис.1.64 - параллель $B''B''_1$), наименьшую - горлом (на рис.1.64 - параллель $C''C''_1$). Плоскость, проходящая через ось поверхности вращения, называется меридиональной, а линия пересечения поверхности с этой плоскостью - меридианом. Меридиан, проецирующийся на плоскость проекций без искажения, называют главным меридианом. Поверхность вращения на чертеже принято показывать на одной из плоскостей проекций проекцией главного меридиана, на другой плоскости - проекцией экватора. Ось вращения поверхности показывают штрихпунктирной тонкой линией.

Известные из школьного курса геометрии поверхности: цилиндр вращения и конус вращения являются частными случаями рассматриваемых поверхностей. Для цилиндра и конуса вращения меридианами являются параллельные, или пересекающиеся прямые линии. На чертеже бесконечные прямолинейные образующие ограничивают параллелями (основаниями), т.е. эти поверхности изображают в виде прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса. При этом одно из оснований цилиндра или основание конуса совмещают с плоскостью проекций (рис.1.65).

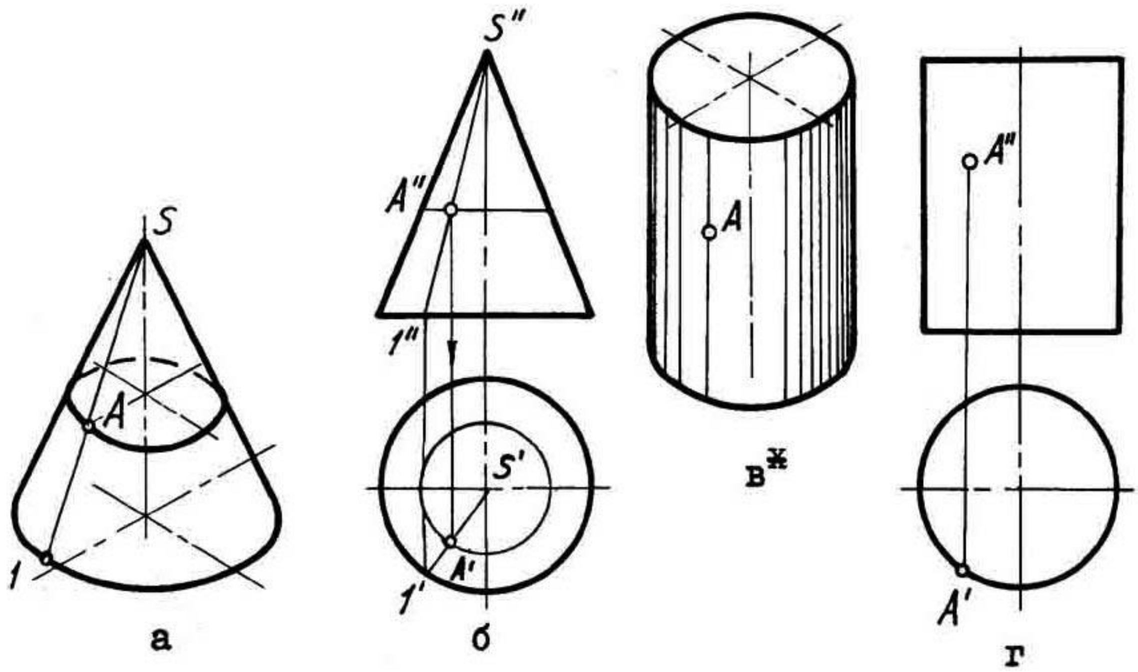


Рис.1.65

Сферическая поверхность образуется вращением окружности вокруг одного из диаметров. На плоскостях проекций сфера изображается в виде окружностей равного диаметра (рис.1.66).

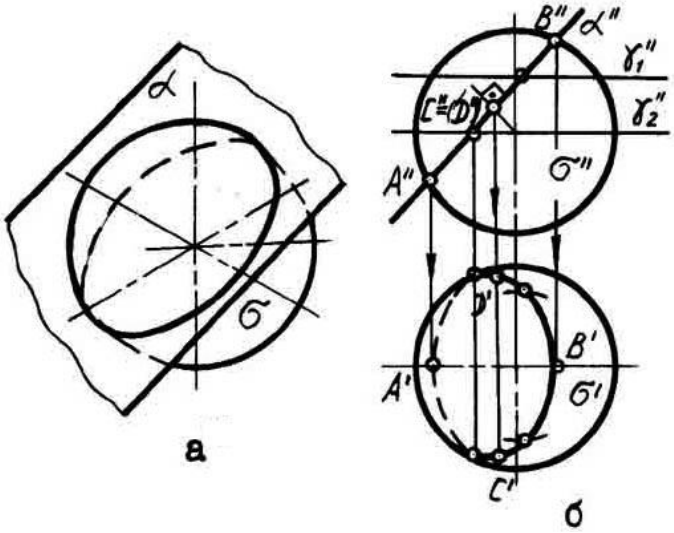


Рис.1.66

При вращении окружности или дуги окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр, образуется поверхность - тор. На рис.1.67 приведены поверхности: а - открытый тор, б - закрытый тор, в - самопересекающийся тор.

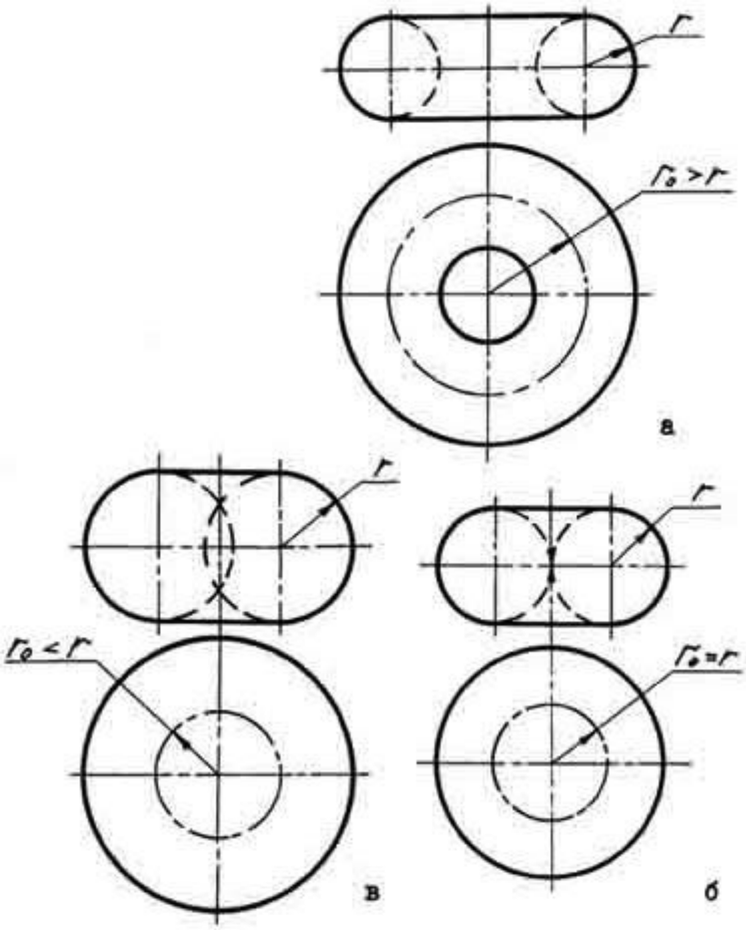


Рис.1.67

Тела, ограниченные поверхностями вращения, широко используются в технике. На рис.1.68 показаны изделия, содержащие эти поверхности:

- а - электронная лампа;

- б - конденсатор;

- в - транзистор;

- г - виброизолятор.

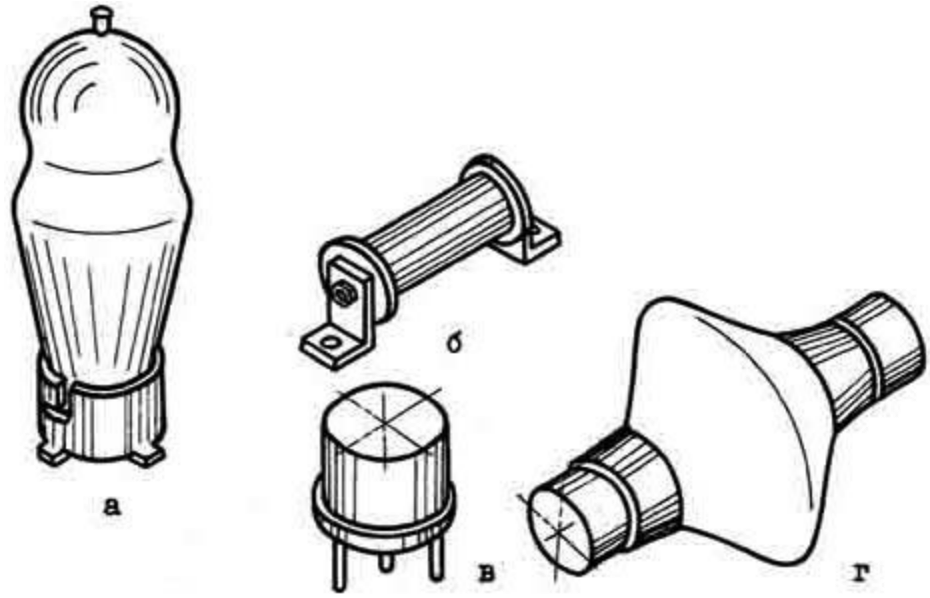


Рис.1.68

Многогранники.

Ограничимся рассмотрением призматических и пирамидальных многогранников. Поверхности призмы и пирамиды представляет собой ряд плоских граней, пересекающихся между собой по прямым (ребрам), которые, в свою очередь, пересекаются в точках (вершинах). Т.е. изображение на чертеже многогранника сводится к изображению ряда отрезков прямых и точек (рис.1.69, рис.1.70).

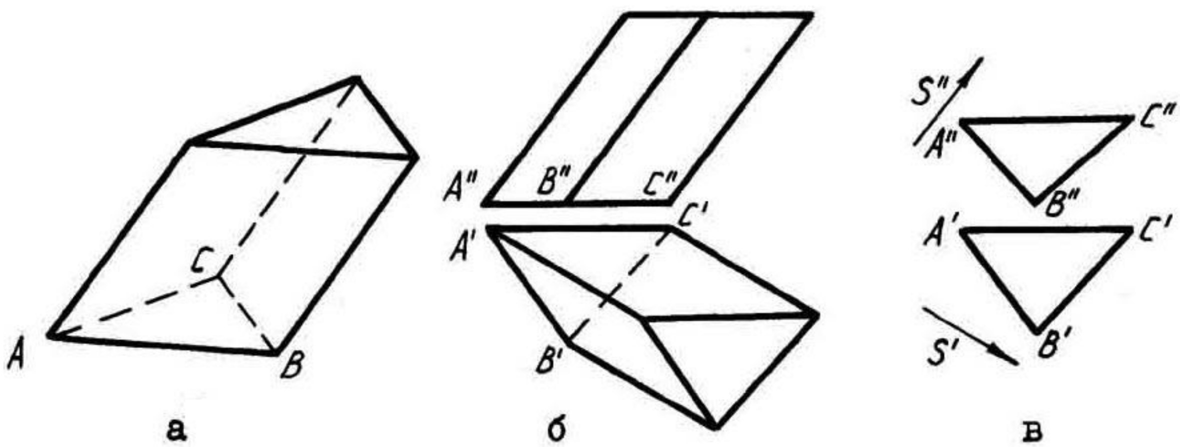


Рис.1.69

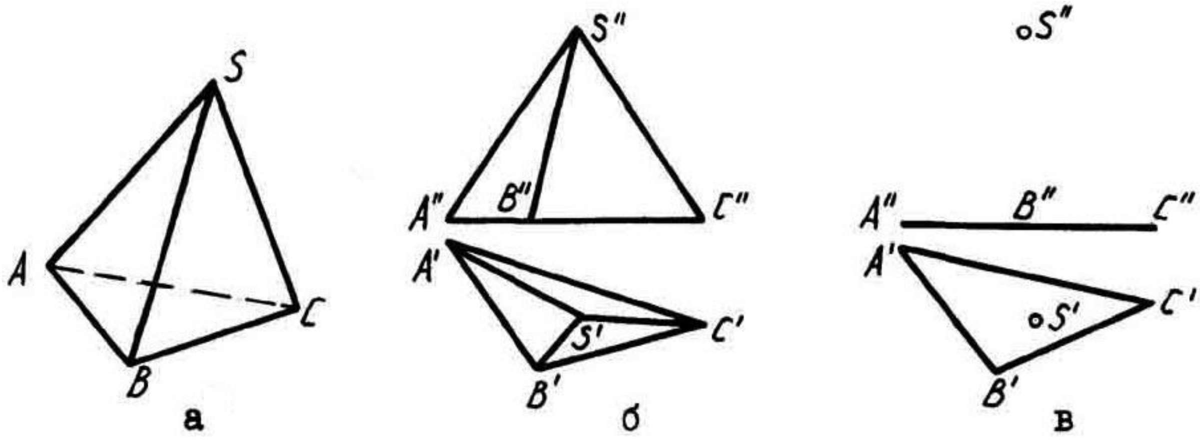


Рис.1.70

Призматическая поверхность может быть задана на чертеже проекциями фигуры, получающейся при пересечении поверхности плоскостью и проекциями ребер или их направлением (рис.1.69в).

Пирамидальная поверхность может быть задана также фигурой сечения боковых ребер плоскостью (основанием) и точкой пересечения ребер – вершиной (рис.1.70в).

Чаще на чертеже изображают призму, т.е. часть призматической поверхности, ограниченную двумя параллельными плоскостями, основаниями. Основания призмы целесообразно располагать параллельно плоскости проекций (рис.1.69б). При изображении пирамиды ее основание располагают параллельно плоскости проекций или лежащим в этой плоскости (рис.1.70б).

ГЛАВА V. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

§9. Определение позиционных задач

Задачи, в которых определяют взаимное расположение отдельных геометрических элементов относительно друг друга называют позиционными задачами.

Различают пять видов позиционных задач, устанавливающих относительное расположение:

- точки и линии;

- двух линий;

- точки и поверхности;

- двух поверхностей;

- линии и поверхности.

Определение относительного расположения точки и линии, двух линий (в дальнейшем будем рассматривать позиционные задачи только с прямыми линиями) не требует дополнительных построений, а устанавливается непосредственно по чертежу. Для решения остальных видов позиционных задач необходимо произвести определенные геометрические операции. Перечень и последовательность выполнения геометрических операций, необходимых для решения задачи, будем называть алгоритмом решения.

Относительное положение точки и поверхности устанавливается с помощью геометрических построений, основанных на том, что если точка принадлежит поверхности, то она принадлежит какой-нибудь линии этой поверхности $A \in \alpha$. На чертеже должно иметь место $A' \in l'$, $A'' \in l''$.

Для решения задачи на чертеже необходимо выполнить следующие операции (алгоритм решения):

- через данную проекцию точки $A'(A'')$ провести проекцию $l'(l'')$ простейшей линии (прямой, окружности), принадлежащей поверхности;

- построить вторую проекцию $l''(l')$ этой линии;

- установить, принадлежит ли вторая проекция точки одноименной проекции линии. При положительном ответе точка будет принадлежать поверхности. Перечень и последовательность построений для решения этой задачи условимся называть алгоритм №1.

§10. Относительное положение точки и прямой линии, двух прямых

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит линии этой плоскости.

Прямая принадлежит плоскости:

- если она проходит через две точки плоскости;

- если она проходит через точку, принадлежащую плоскости, и параллельна какой-либо прямой этой плоскости.

Учитывая это, задачу, связанную с выбором прямой в плоскости, можно решить двумя путями:

- на элементах, задающих проекции плоскости, выбрать две точки и через них провести проекции прямой (рис.1.71, рис.1.72);

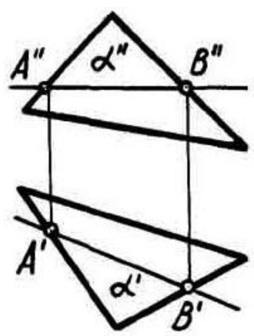


Рис.1.71

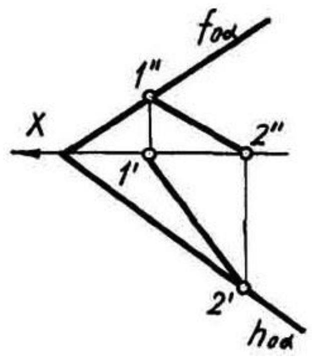


Рис.1.72

- на одном из элементов, задающих проекции плоскости, выбрать точку и через нее провести проекции прямой параллельно прямой, заданной в плоскости по условию (рис.1.73, рис.1.74).

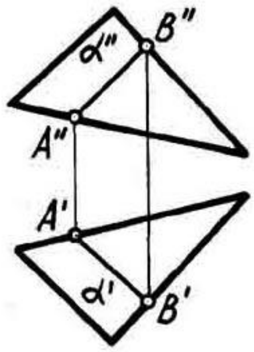


Рис.1.73

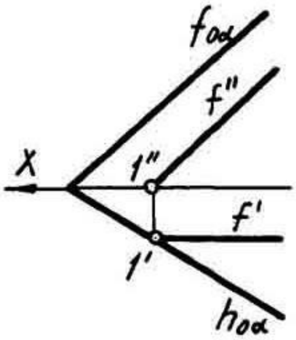


Рис.1.74

Зная порядок построения прямой в плоскости, можно решить задачу на принадлежность точки плоскости, используя описанный выше алгоритм решения. Рассмотрев рис.1.72 и рис.1.74, делаем вывод - если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах плоскости. Это используют при построении следов плоскости, заданной другим способом, а также для построения произвольной прямой или точки, лежащих в плоскости, заданной следами.

Главными прямыми плоскости являются:

1) прямые, принадлежащие плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций (прямые уровня) (рис.1.75):

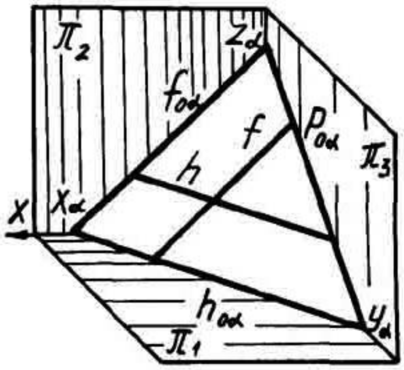


Рис.1.75

- горизонталь плоскости - прямая, параллельная плоскости π_1, (рис.1.76, рис.1.77).

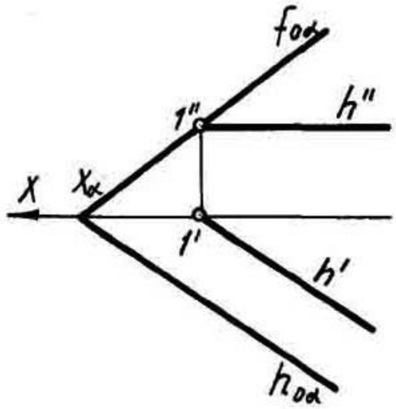


Рис.1.76

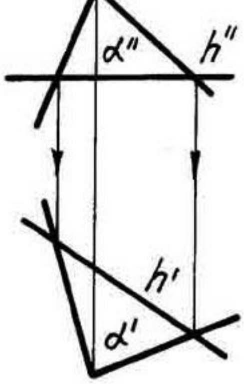


Рис.1.77

Признаки горизонтали на чертеже : $h''\|x$, $h'\|h_{0\alpha}$.

- Фронталь плоскости - прямая, параллельная плоскости π_2 (рис.1.78).

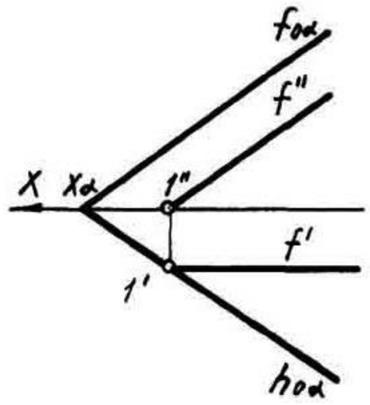


Рис.1.78

Признаки фронтали на чертеже: $f'\|x$, $f''\|f_{0\alpha}$.

- Профильная прямая, принадлежащая плоскости, показана на (рис.1.79).

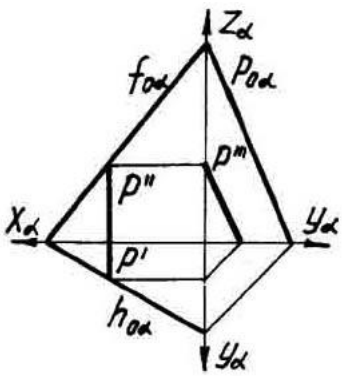


Рис.1.79

Прямыми уровня пользуются для различных построений в плоскости.

2) Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные какой-либо линии уровня. Эти линии применяются для определения угла наклона

заданной плоскости к плоскости проекций (рис.1.80) и носят название линий наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций.

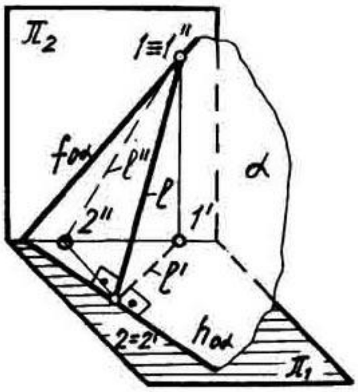


Рис.1.80

Линия l (см. рис.1.80) и ее проекция l' образуют линейный угол, являющийся мерой двугранного угла, составленного плоскостями π_1 и π_2. Для определения величины этого угла на рис.1.81 и рис.1.82 построена горизонтальная проекция линии наибольшего наклона.

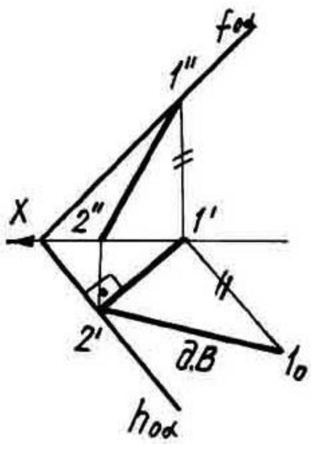


Рис.1.81

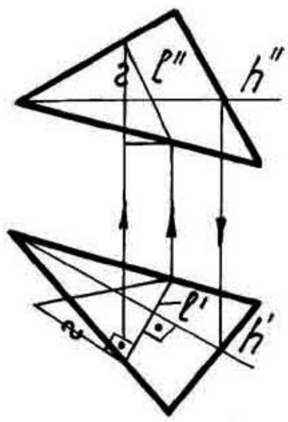


Рис.1.82

Она направлена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали или следа (по свойству ортогонального проецирования прямого угла). По горизонтальной проекции построена фронтальная, далее найден угол. Для нахождения угла наклона плоскости к плоскостям π_2 и π_3 следует построить соответствующие линии наибольшего наклона.

§11. Принадлежность точки и линии простейшей поверхности

При решении задачи о принадлежности точки поверхности вращения используют параллели этой поверхности. На рис.1.65 построены точки А. На цилиндрической и конической поверхности можно также использовать для этих целей образующие (см. рис.1.65).

При решении задачи на поверхности призмы или пирамиды используются прямые линии, построенные в гранях этих поверхностей (рис.1.83).

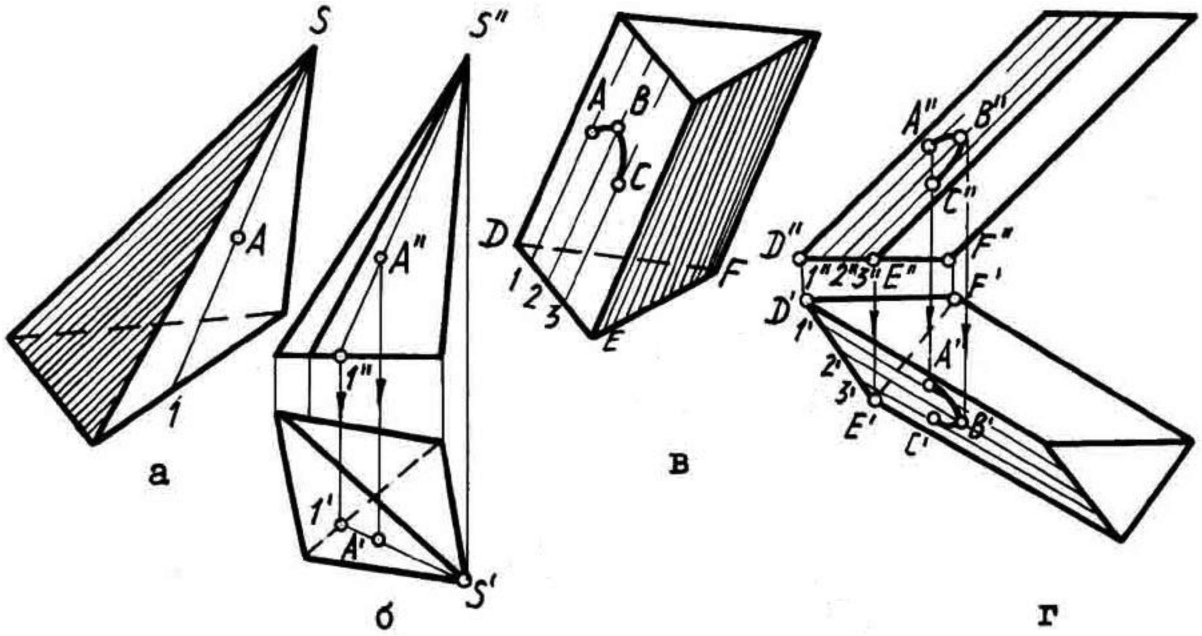


Рис.1.83

При построении кривой линии, принадлежащей поверхности, строят проекции ряда точек, принадлежащих этой линии. На рис.1.83г по заданной фронтальной проекции линии A"B"C" построена ее горизонтальная проекция.

ГЛАВА VI. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(частные случаи)

§12. Алгоритм решения задачи

При пересечении двух поверхностей получается линия l, все точки которой принадлежат одновременно пересекающимся поверхностям α и β (рис.1.84 и рис.1.85).

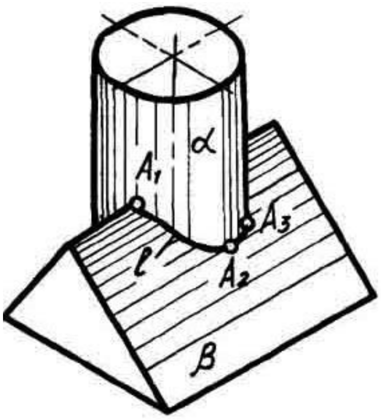


Рис.1.84

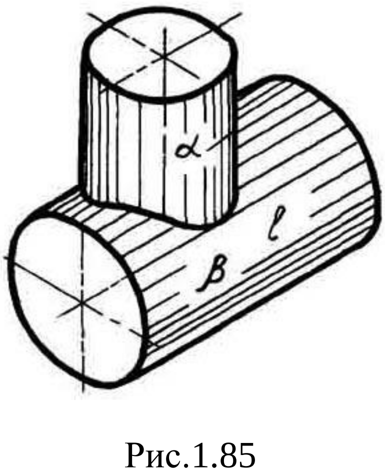


Рис.1.85

В зависимости от вида и взаимного расположения поверхности могут иметь одну иди несколько линий взаимного пересечения.

Общим способом построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, является способ вспомогательных секущих поверхностей (посредников).

Последовательность решения задачи (алгоритм) следующая:

- вводят вспомогательную секущую поверхность γ;

- определяют линии пересечения этой поверхности, с каждой из заданных $l=\gamma\cap\alpha$, $m=\gamma\cap\beta$;

- находят точку, в которой пересекаются полученные линии. Эта точка принадлежит искомой линии пересечения $A=l\cap m$.

Повторив указанные операции (рис.1.86) n раз, получают n точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей.

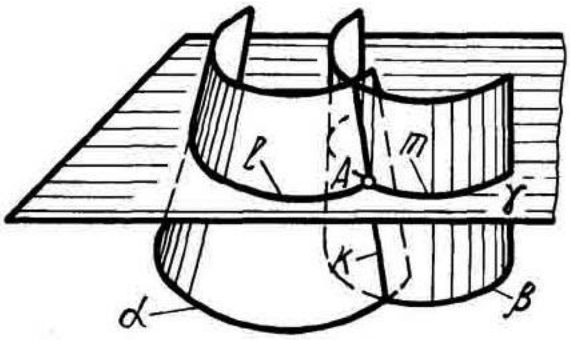


Рис.1.86

Используя символическую запись, алгоритм решения задачи можно представить так: $K=(A_1\cup A_2\cup A_3\ldots A_n)$, $A_{1,2,\ldots n}=(\gamma_{1,2,\ldots n}\cap\alpha)(\gamma_{1,2,\ldots n}\cap\beta)$.

Перечень и последовательность построений для решения этой задачи условимся называть алгоритм №2.

§13. Относительное положение плоскостей. Пересечение плоскостей. Параллельные плоскости

Две плоскости пересекаются под некоторым углом. Если угол равен нулю, то линия их пересечения удалена в бесконечность - плоскости параллельны. Если угол равен 90° - плоскости взаимно перпендикулярны.

Две плоскости пересекаются между собой по прямой, для определения которой достаточно найти две точки, общие для этих плоскостей (рис.1.87).

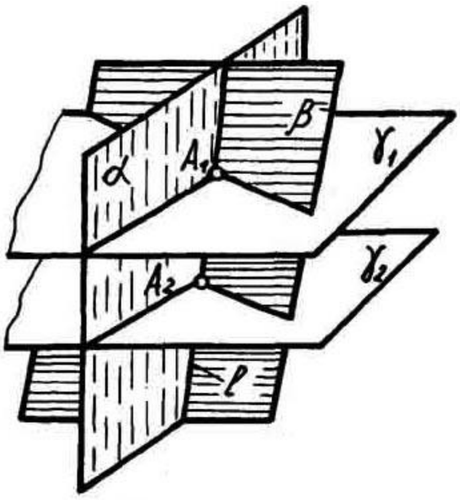


Рис.1.87

Для решения задачи используют алгоритм №2.

В качестве вспомогательных секущих поверхностей используют плоскости частного положения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пример 1. На рис.1.88 изображена плоскость общего положения α, пересекающаяся с горизонтальной плоскостью β. Требуется построить линию пересечения плоскостей.

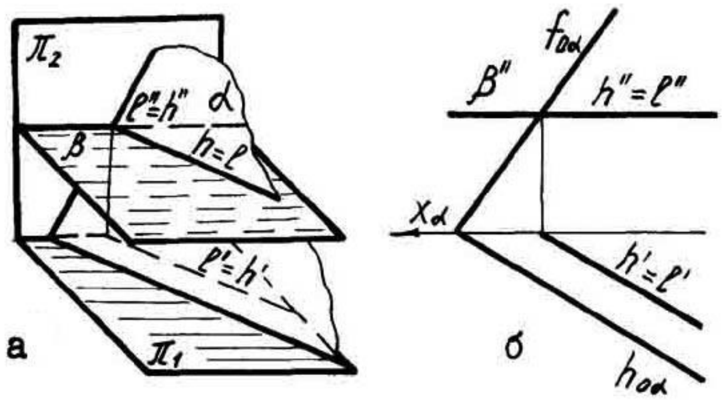


Рис.1.88

Линия l пересечения плоскостей будет горизонтальной, т.к. она лежит в плоскости β. Следовательно, она будет являться горизонталью плоскости α. Фронтальная проекция l" линии пересечения совпадает с проекцией β" плоскости. Т.к. l" - горизонталь плоскости α, то ее горизонтальная проекция $l'||h_{0\alpha}$. Для построения l' воспользуемся следом горизонтали (рис.1.88б).

Пример 2. Заданы пересекающиеся плоскости: α - общего положения, и β - горизонтально-проецирующая. Требуется построить проекции линии пересечения.

Решение приведено на рис.1.89.

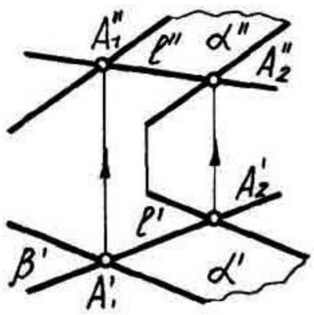


Рис.1.89

Горизонтальная проекция l' линии пересечения совпадает с проекцией β' плоскости. В точках A_1 и A_2 прямая l пересекает прямые, задающие плоскость α. По горизонтальным проекциям этих точек найдены фронтальные проекции A''_1, и A''_2 и проведена фронтальная проекция l" линии пересечения l.

Пример 3. Построить проекции линии пересечения плоскости α с плоскостью, заданной двумя пересекающимися прямыми m и n. Решение видно из рис.1.90.

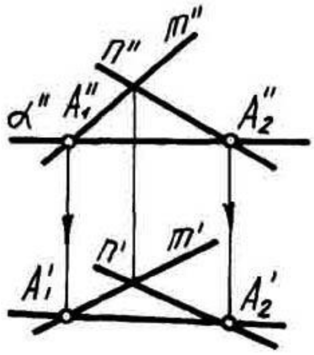


Рис.1.90

Пример 4. Построить проекции линии пересечения плоскостей α и β (рис.1.91).

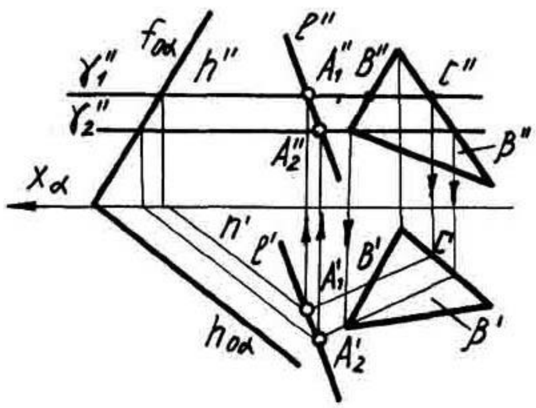


Рис.1.91

Известно, что линия пересечения $l=A_1,A_2$. Для нахождения точки А, проведем вспомогательную плоскость $\gamma_1 \| \pi_1$. Эта плоскость пересечет плоскость α по горизонтали h (h', h'') и плоскость β по горизонтали ВС (B'C', B''C''). Построение проекций видно из чертежа. Пересечение горизонталей h и ВС дают точку A_1 (A'_1, A''_1), которая принадлежит одновременно трем плоскостям: α, β, γ_1. Следовательно, она находится на линии пересечения плоскостей α и β. Для того, чтобы определить точку A_2, проведем вторую вспомогательную плоскость γ_2. Точки A_1 и A_2 определяют искомую прямую l.

Пример 5. Определить линию пересечения плоскостей α и β (рис.1.92).

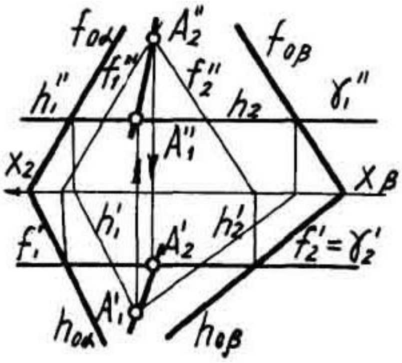


Рис.1.92

Вводим плоскости посредники $\gamma_1||\pi_1$, $\gamma_2||\pi_2$. Эти плоскости пересекут заданные по горизонталям h_1 (h'_1, h''_1) и h_2 (h'_2, h''_2), и фронталям f_1 (f'_1, f''_1) и f_2 (f'_2, f''_2). Находим точки A_1 (A'_1, A''_1) и A_2 (A'_2, A''_2). На чертеже $A'_1=h'_1 \cap h'_2$, $A''_2= f''_1 \cap f''_2$. Две точки определят искомую прямую l (l', l'')=(A_1, A_2).

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис.1.93), $\alpha=l \cap m$, $\beta=k \cap n$. Если $l||k$ и $m||n$, то $\alpha||\beta$.

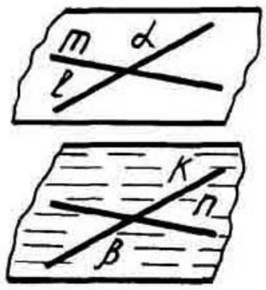


Рис.1.93

Очевидно, что у параллельных плоскостей соответствующие следы параллельны (рис.1.94).

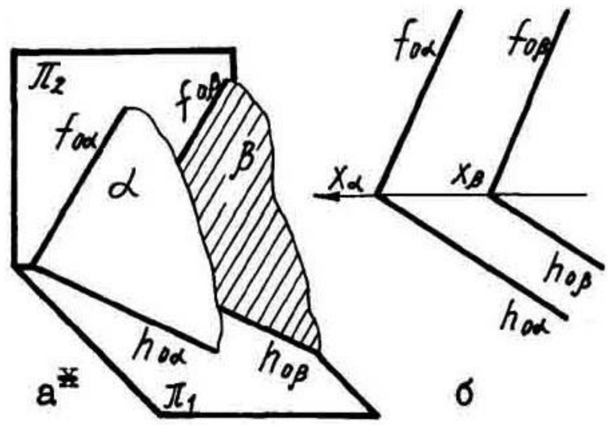


Рис.1.94

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Через точку А провести плоскость, параллельную заданной (рис.1.95).

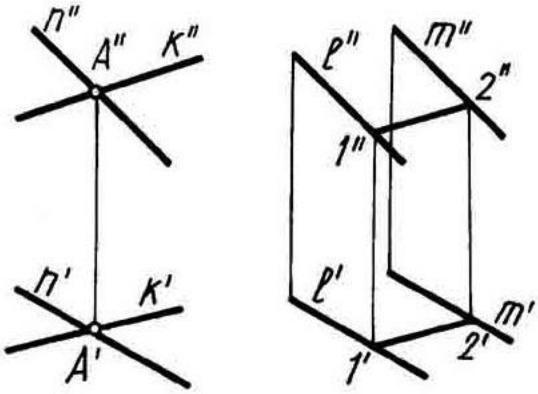


Рис.1.95

Из чертежа видно, что искомая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми n и k, одна из которых n||l, вторая k||(1,2).

Пример 2. Через точку А провести плоскость α, параллельную плоскости β ($h_{0\beta}$, $f_{0\beta}$) (рис.1.96).

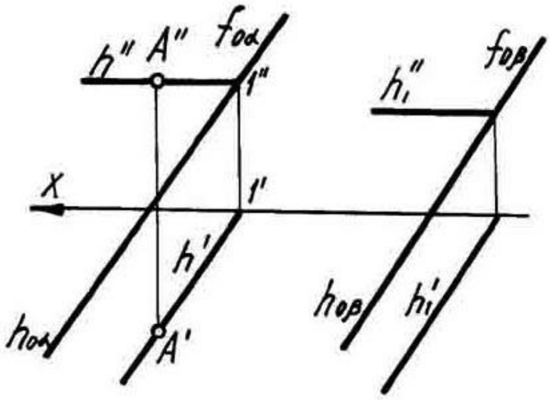


Рис.1.96

Следы искомой плоскости будут параллельны следам заданной плоскости, т.е. $h_{0\alpha}||h_{0\beta}$, а $f_{0\alpha}||f_{0\beta}$.

Для построения следов $f_{0\alpha}$ и $h_{0\alpha}$ воспользуемся свойством: если прямая принадлежит плоскости, то ее следы принадлежат одноименным следам плоскости. Через точку А проведем горизонталь h (h', h") искомой плоскости h"||x и $h'||h_{0\beta}$. Найдем фронтальный след 1 (1', 1") горизонтали. Через точку 1 (1', 1") проведем $f_{0\alpha}||f_{0\beta}$ и $h_{0\alpha}||h_{0\beta}$.

§14. Пересечение простейших поверхностей плоскостью частного положения

Линия пересечения криволинейной поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую.

Построение линии пересечения производят нахождением ряда точек, ей принадлежащих. При этом используют алгоритм №2 (рис.1.97).

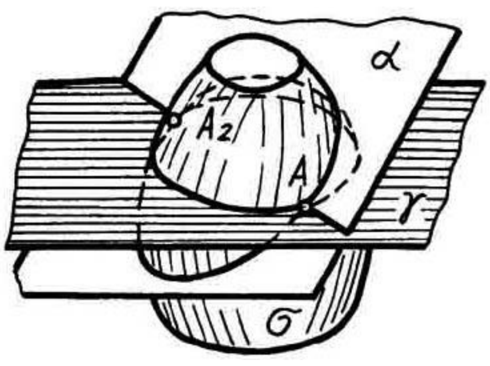


Рис.1.97

Вспомогательные плоскости следует проводить так, чтобы линия их пересечения с поверхностью проецировалась в виде простых линий (прямых, окружностей), а линии пересечения с заданной плоскостью - в виде прямых частного положения.

Начинать построение следует с нахождения характерных (опорных) точек - точек, определяющих границы видимых и невидимых участков проекций линии пересечения, высших и низших точек кривой и т.п. После этого в требуемом количестве определяют промежуточные точки.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Построить проекции линии пересечения поверхности σ с фронтально-проецирующей плоскостью α (рис.1.98).

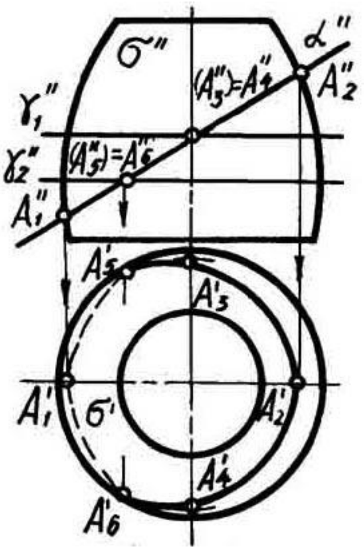


Рис.1.98

Фронтальная проекция линии пересечения в приведенном примере совпадает с фронтальной проекцией плоскости α" и ограничена проекциями точек A"$_1$ и A"$_2$.

Горизонтальные проекции точек A'$_1$, A'$_2$, лежащих на очерковых образующих, определяются без дополнительных построений по линиям проекционной связи.

Для построения горизонтальных проекций промежуточных точек вводим вспомогательную плоскость γ_1, перпендикулярную оси поверхности вращения σ. Плоскость γ_1 пересекает заданную поверхность по параллели, которая на фронтальную плоскость проецируется в виде прямой, а на горизонтальную - в вида окружности.

Плоскость γ_1, с заданной плоскостью α пересекается по прямой, перпендикулярной плоскости π_2.

На горизонтальной проекции отмечаем точки A'_3, A'_4 пересечения окружности и прямой, принадлежащие поверхности σ и плоскости α. На фронтальной проекции - A''_3, A''_4.

Вводя плоскости посредники γ_2, γ_3,...γ_n получим проекции необходимого количества промежуточных точек.

Соединив их, получаем горизонтальную проекцию плоской кривой - линии пересечения поверхности с плоскостью.

Пример 2. Построить проекции линии пересечения прямого кругового цилиндра горизонтально-проецирующей плоскостью α (рис.1.99).

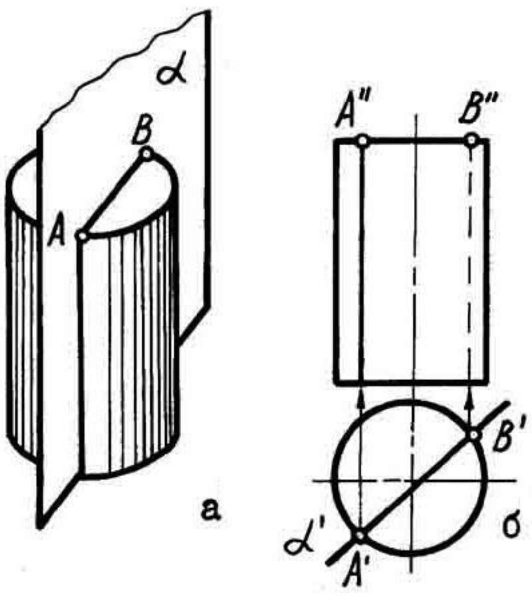


Рис.1.99

Плоскость α, параллельна оси цилиндра, следовательно, она пересекает цилиндр по образующим. Горизонтальная проекция сечения совпадает с проекцией плоскости α'. Положение образующих (A, B) определяется на пересечении горизонтальной проекции плоскости α и проекции оснований. Проведя линии связи, определяем фронтальные проекции образующих (A", B").

Пример 3. Построить проекции линии пересечения прямого кругового конуса σ с плоскостью β (рис.1.100).

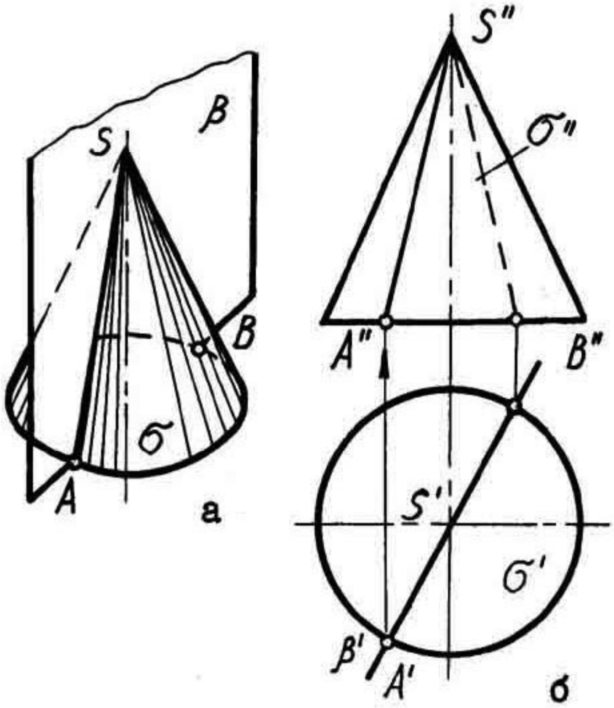


Рис.1.100

Плоскость β - проецирующая, проходит через вершину конуса и пересекается с основанием. Такая плоскость пересекает конус по образующим SA и SB. Построение видно из чертежа.

Пример 4. Построить проекции линии пересечения прямого кругового конуса σ горизонтально проецирующей плоскостью β (рис.1.101).

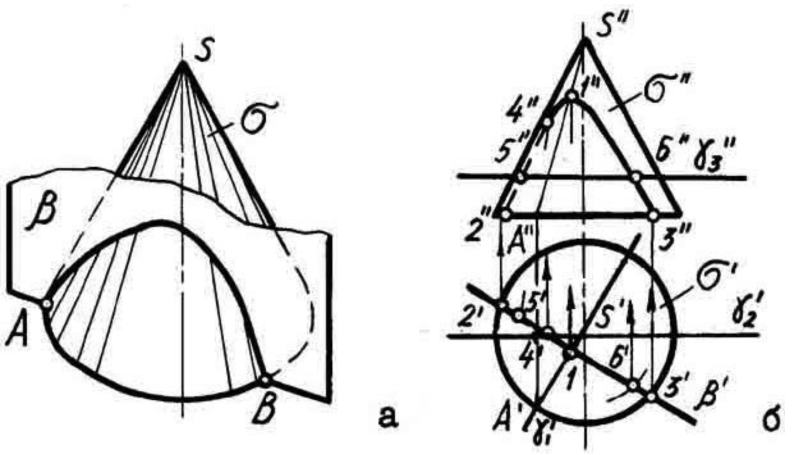


Рис.1.101

Плоскость β пересекает поверхность конуса σ по гиперболе. Горизонтальная проекция гиперболы совпадает с проекцией плоскости β'. Для построения высшей точки линии пересечения введем плоскость посредник $\gamma_1 \perp \beta$, проходящую через ось конуса. Эта плоскость пересечет конус по образующим. На образующей AS найдем искомую точку. Построение точек пересечения 2 и 3 заданной плоскости с основанием конуса видно из чертежа. Границей видимости участков кривой линии на плоскости π_2 является точка 4 - пересечение плоскости β с очерковой образующей конуса. Промежуточные точки 5 и 6 найдены с помощью горизонтальной плоскости-посредника γ_3.

Пример 5. Построить проекции линии пересечения прямого кругового конуса σ фронтально-проецирующей плоскостью α (рис.1.102).

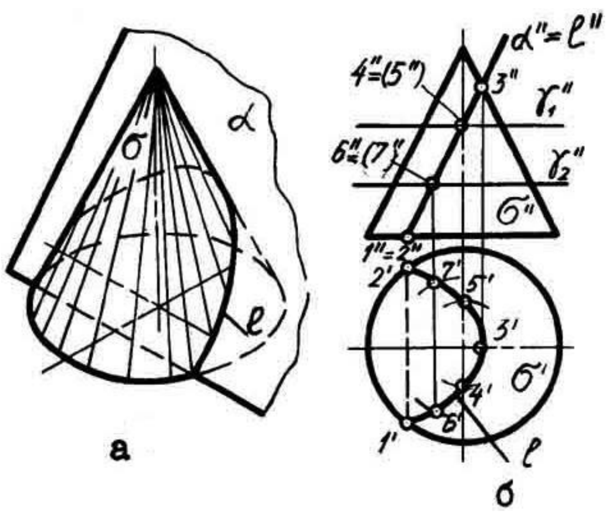


Рис.1.102

Плоскость α пересекает поверхность конуса σ по параболе с вершиной в точке 3. Фронтальная проекция параболы совпадает с фронтальной проекцией α''. Горизонтальную проекцию строим по точкам. Характерные точки 1 (1', 1''), 2 (2', 2'') и 3 (3', 3'') найдены без дополнительных построений. Для определения промежуточных точек 4 (4', 4'') и 5 (5', 5'') введена плоскость-посредник $\gamma_1 \| \pi_1$. Она пересечет конус по окружности, а плоскость α - по прямой l (l', l''), пересечение горизонтальных проекций которых и даст искомые точки 4 и 5.

При помощи плоскости посредника γ_2 найдены точки 6 (6', 6'') и 7 (7', 7'').

Пример 6. Построить проекции линии пересечения поверхности сферы σ плоскостью α (рис.1.103).

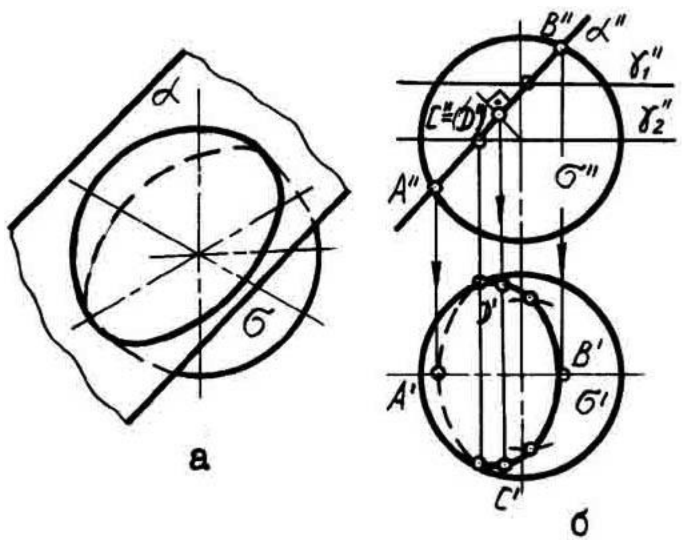


Рис.1.103

Плоскость α пересекает поверхность сферы по окружности, фронтальная проекция которой совпадает с фронтальной проекцией плоскости (α''). Горизонтальную проекцию окружности - эллипс строим по главным осям: большой осью является горизонтальная проекция (C'D') диаметра CD, перпендикулярного к фронтальной плоскости проекций, а малой осью - горизонтальная проекция (A'B') диаметра AB , расположенного параллельно фронтальной плоскости проекций. По найденным главным осям можно построить эллипс - горизонтальную проекцию окружности - линии пересечения сферы плоскостью. Промежуточные точки эллипса можно также найти, вводя вспомогательные плоскости γ (см. рис.1.103б). Точки С (С', С'') и D (D', D''), отделяющие видимую от невидимой части линии пересечения, найдены без дополнительных построений.

§15. Сечение гранных поверхностей плоскостью

В результате сечения получается многоугольник, вершины которого расположены на ребрах многогранника (так как они являются точками пересечения ребер с секущей плоскостью), а стороны - на гранях (так как они являются линиями пересечения граней с секущей плоскостью). Так как границы поверхности являются частным случаем криволинейных поверхностей и состоят из отдельных плоских участков (граней), пересекающихся по прямым линиям (ребрам), то при решении задачи на пересечение плоскостью пользуются не общим приемом (алгоритмом №2), а более простым. Построение сводят к многократному решению задачи на пересечение прямой с плоскостью или двух плоскостей. Следует иметь в виду, что стороны многоугольника сечения, лежащие на видимых гранях, будут видимыми; а лежащие на невидимых гранях - невидимыми.

Пример 1. Построить проекции сечения пирамиды SABCD фронтально-проецирующей плоскостью β (рис.1.104).

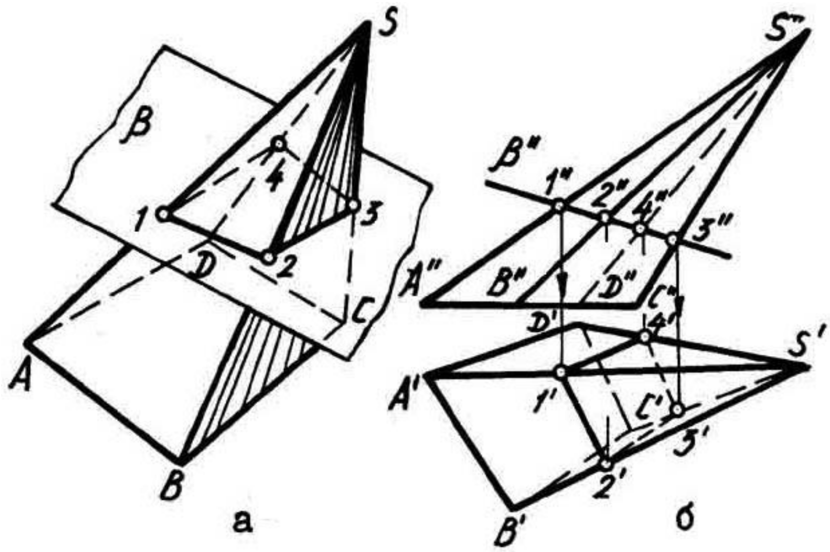


Рис.1.104

Так как плоскость пересекает все ребра пирамиды, то при пересечении получается четырехугольник, вершины которого представляют собой точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью β.

Плоскость β – фронтально-проецирующая. Отметим фронтальные проекции 1", 2", 3", 4" точек пересечения ребер пирамиды с плоскостью. Горизонтальные проекции (1', 2', 3', 4') найдем при помощи линий связи. Фронтальной проекцией фигуры сечения является прямая 1", 2", 3", 4", совпадающая с проекцией плоскости, а горизонтальной - четырехугольник 1', 2', 3', 4'.

Пример 2. Построить проекции сечения призмы горизонтально-проецирующей плоскостью α (рис.1.105). Построение видно из чертежа.

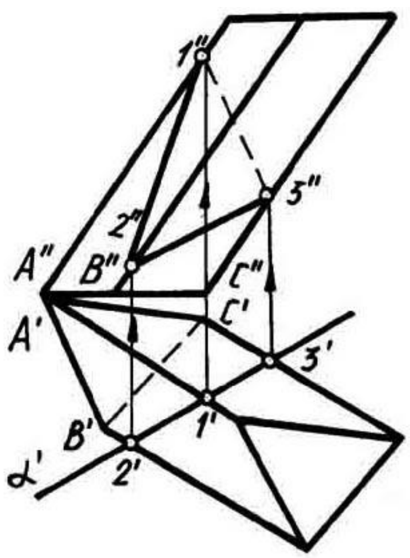


Рис.1.105

Пример 3. Построить проекции сечения трехгранной призмы плоскостью общего положения, заданной параллельными прямыми k, l (рис.1.106).

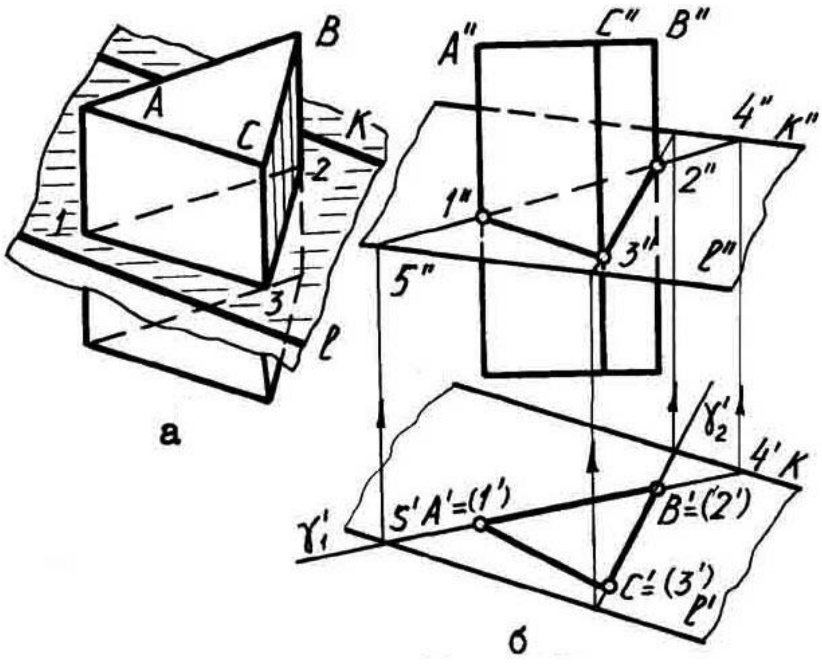


Рис.1.106

Через грань призмы АВ проведем вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость γ_1. Плоскость γ_1 пересекается с заданной плоскостью по прямой 4, 5 (4', 5', 4", 5"). Участок этой прямой 1", 2" является фронтальной проекцией линии пересечения грани АВ с заданной плоскостью. Аналогично построена линия пересечения грани ВС с плоскостью. Сечение 1, 2, 3 (1', 2', 3'; 1", 2", 3") будет искомым.

§16. Пересечение двух поверхностей. Метод вспомогательных секущих плоскостей. Метод секущих концентрических сфер с постоянным центром вращения

Линия пересечения двух кривых поверхностей в общем случае представляет собой пространственную кривую линию. В некоторых частных случаях линия пересечения может быть плоской, а также состоять из нескольких отдельных участков. Как указано ранее, построение линии пересечения производится с помощью алгоритма №2.

Практически в качестве посредников применяют поверхности, которые пересекают заданные поверхности по простейшим линиям (прямым, окружностям и т.д.), построение проекций которых не представляло бы трудностей. На рис.1.107 для решения задачи введена вспомогательная плоскость, перпендикулярная оси конуса и параллельная образующим цилиндра.

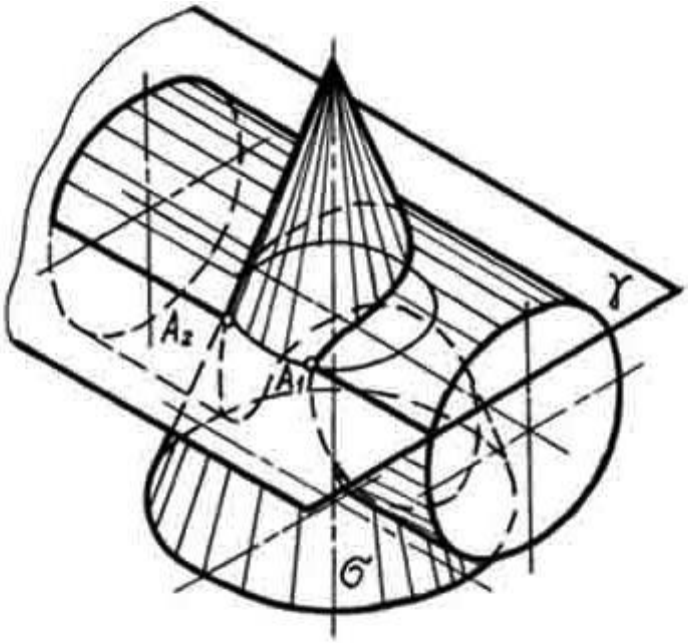


Рис.1.107

Она пересечет конус по окружности и цилиндр по образующим. Пересечение этих линий даст точки A_1 и A_2, принадлежащие линии пересечения поверхностей.

В настоящем курсе рассматриваются, главным образом, случаи пересечения поверхностей вращения с использованием в качестве посредников:

- плоскостей, параллельных плоскостям проекций (плоскостей уровня);

- сферических поверхностей с постоянным центром.

Первое возможно в случае расположения осей поверхностей вращения перпендикулярно плоскостям проекций.

Второе возможно применительно к поверхностям вращения, оси которых пересекаются и образуют плоскость, параллельную какой-либо плоскости проекций.

Построение линий пересечения поверхностей необходимо начинать с нахождения характерных точек.

При построении линии пересечения следует иметь в виду, что ее проекции всегда расположены в пределах площади наложения одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

Применение способа секущих плоскостей уровня иллюстрируем на ряде примеров.

Пример 1. Построить проекции линии пересечения цилиндра с конусом (рис.1.108).

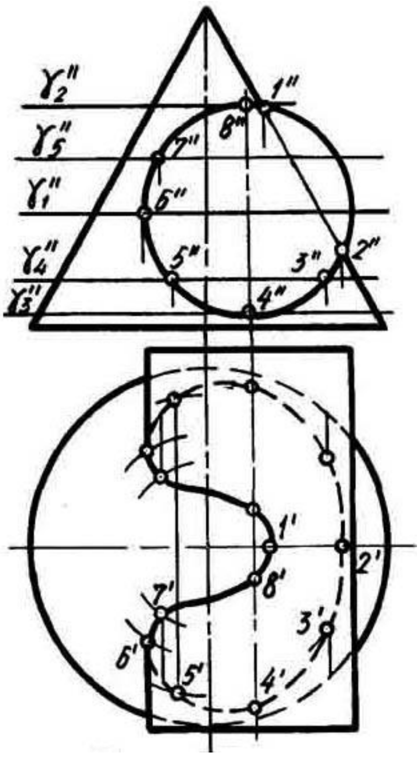


Рис.1.108

Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальной проекцией цилиндра. Отмечаем проекции характерных точек 1, 2, 4, 6, 8. Для построения горизонтальных проекций вводим горизонтальные вспомогательные плоскости γ_1, γ_2, γ_3, которые пересекутся с поверхностью конуса по окружностям, а с поверхностью цилиндра - по образующим. Пересечение их горизонтальных проекций даст горизонтальные проекции точек 6, 8, 4.

Для построения промежуточных точек 3, 5, 7 вводим вспомогательные плоскости γ_4, и γ_5. Полученные горизонтальные проекции точек соединяем плавной кривой с учетом видимости ее участков.

Пример 2. Построить проекции линии пересечения поверхности цилиндра и сферы (рис.1.109).

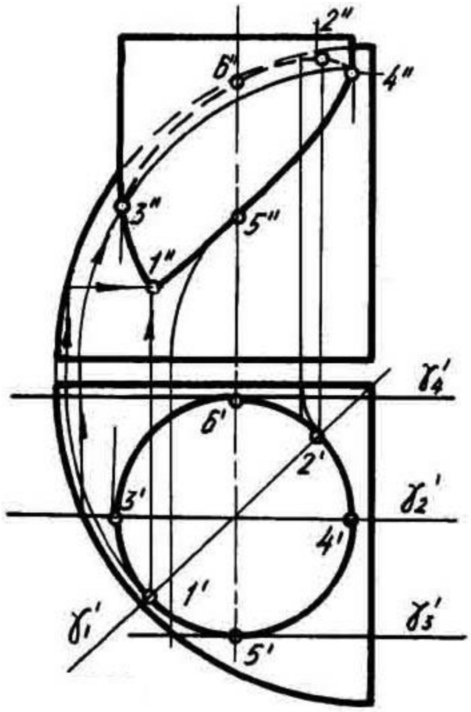


Рис.1.109

Все точки горизонтальной проекции цилиндра являются горизонтальными проекциями точек, принадлежащих искомой линии пересечения. Определяем точки 1 и 2, наименее и наиболее удаленные от плоскости π_1. Для этого через оси поверхностей проводим горизонтально-проецирующую плоскость γ_1, которая пересекает цилиндр по образующим, а сферу - по окружности. Пересечение плоскости γ_1, с цилиндром на плоскости π_1 определит образующие, на которых лежат точки 1 и 2. Для определения фронтальных проекций точек осуществим поворот этих образующих вокруг вертикального диаметра сферы до совмещения с ее главным меридианом, дальнейшее построение проекций 1" и 2" видно из чертежа.

Вводя посредник - фронтальную плоскость γ_2, определяем проекции 3" и 4" точек, отделяющих видимую часть линии пересечения от невидимой. Фронтальные проекции 5 и 6 точек, наиболее и наименее удаленных от плоскости π_2 определены при помощи плоскостей γ_3 и γ_4. Проекции промежуточных точек также определяются при помощи фронтальных плоскостей посредников.

Пример 3. Построить проекции линии пересечения двух цилиндров (рис.1.110).

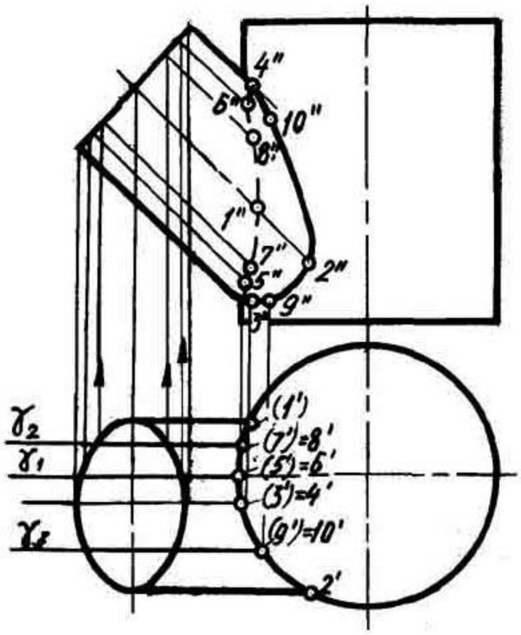


Рис.1.110

Построение линии пересечения цилиндров начнем с нахождения характерных точек 1 и 2, наименее и наиболее удаленных от плоскости π_2. Так как точки находятся на очерковых образующих наклонного цилиндра, для их определения не требуется дополнительных построений. Определение точек 3 и 4, наименее и наиболее удаленных от плоскости π_1 видно из чертежа.

Для нахождения промежуточных точек вводим плоскости посредники γ_1, γ_2, γ_3. Эти плоскости пересекут цилиндры по образующим, на пересечении которых будут найдены точки 5...10. Соединив найденные точки плавной кривой, получаем проекции искомой линии пересечения.

В некоторых случаях в качестве вспомогательной поверхности (посредника) целесообразно применение сферы.

Как указано, этот способ можно применить для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются и расположены в плоскости, параллельной плоскости проекций. Сущность способа состоит в том, что из точки пересечения осей поверхностей вращения проводится сфера, которая пересечет поверхности вращения по окружностям (рис.1.111).

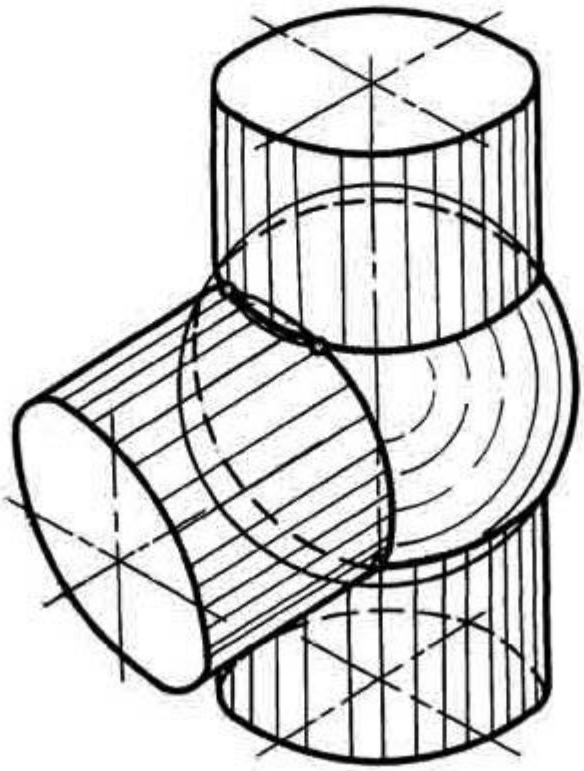


Рис.1.111

Обе окружности принадлежат поверхности сферы и, пересекаясь, дают точки, принадлежащие линии пересечения заданных поверхностей. Эти окружности на одной из плоскостей проекций изображаются в виде отрезков прямых, что даст возможность определить точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Радиусы сфер выбираются в таких пределах, чтобы сфера пересеклась с обеими заданными поверхностями и не выходила за опорные точки.

Пример 1. Построить проекции линии пересечения двух цилиндров (рис.1.112).

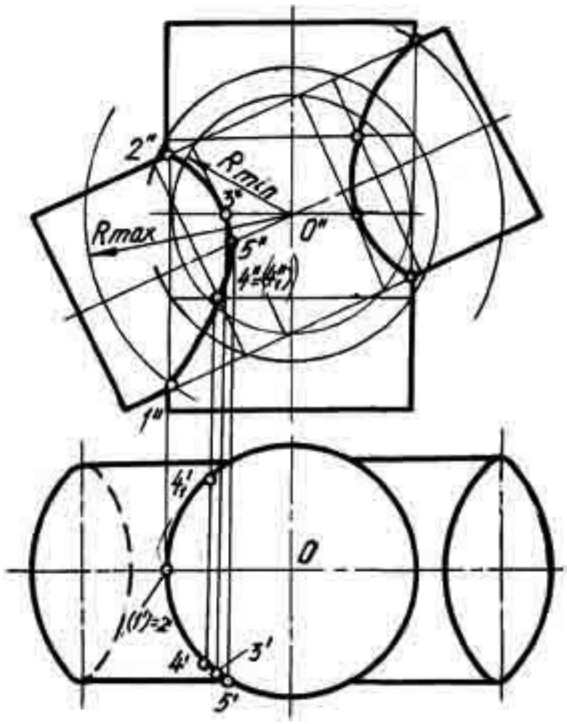


Рис.1.112

Оси цилиндров пересекаются и расположены в плоскости, параллельной плоскости проекций. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Отмечаем точки 1 и 2, расположенные на очерковых образующих. Принимаем точку О (О', О") пересечения осей цилиндров за центр вспомогательных сферических поверхностей. Радиусы сфер выбираются в пределах R_{max} и R_{min}. R_{min} - сфера, касательная к одной поверхности, и пересекавшая другую поверхность. Из точки 0 описываем сферу, которая пересекает каждую из данных поверхностей по окружности. Вертикальные их проекции - прямые линии находим по точкам пересечения главных меридианов сферы и цилиндров. На пересечении этих прямых отмечаем вертикальные проекции точки 4 (4', 4"). Аналогично, изменяя радиус сферы, получаем ряд точек. Соединив эти точки, находим проекции искомой линии пересечения.

Пример 2. Построить проекции линии пересечения двух конусов (рис.1.113).

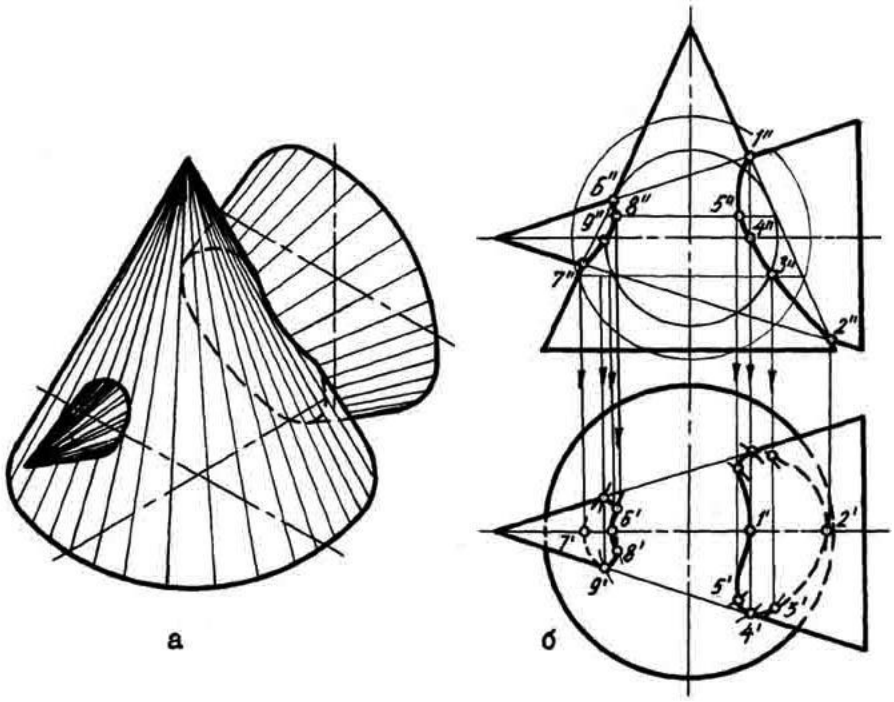


Рис.1.113

Построение проекций линии пересечения видно из рисунков. Оно выполняется как и в предыдущем примере.

§17. Взаимное пересечение многогранников

При решении задачи на взаимное пересечение многогранников пользуются не общим приемом (алгоритмом №2), а более простым, основанным на многократном решении задачи на пересечение плоскостей или прямой с плоскостью. Это возможно, т.к. многогранники в отличие от кривых поверхностей представляют совокупность плоских участков (граней), пересекающихся между собой по прямым линиям (ребрам). Линию пересечения двух многогранников можно построить двумя способами:

- найдя точки пересечения ребер каждой поверхности с гранями другой поверхности и соединив их в определенной последовательности;

- построив линии пересечения граней одного многогранника с гранями другого. Преимущество отдается тому из способов, который в зависимости от условий задания многогранников дает более простое решение. Линиями пересечения многогранников в общем случае являются пространственные замкнутые многоугольники.

В зависимости от вида многогранников и их взаимного расположения линиями пересечения могут быть один, два и более многоугольников.

Следует иметь в виду, что стороны этих многоугольников будут видимыми, если они являются результатом пересечения видимых граней, если хотя бы одна из пересекающихся граней невидимая (сторона многоугольника), то линия их пересечения - невидимая.

Пример. На рис.1.114 заданы пересекающиеся призма ABC и пирамида SDEG. Построить проекции линии пересечения.

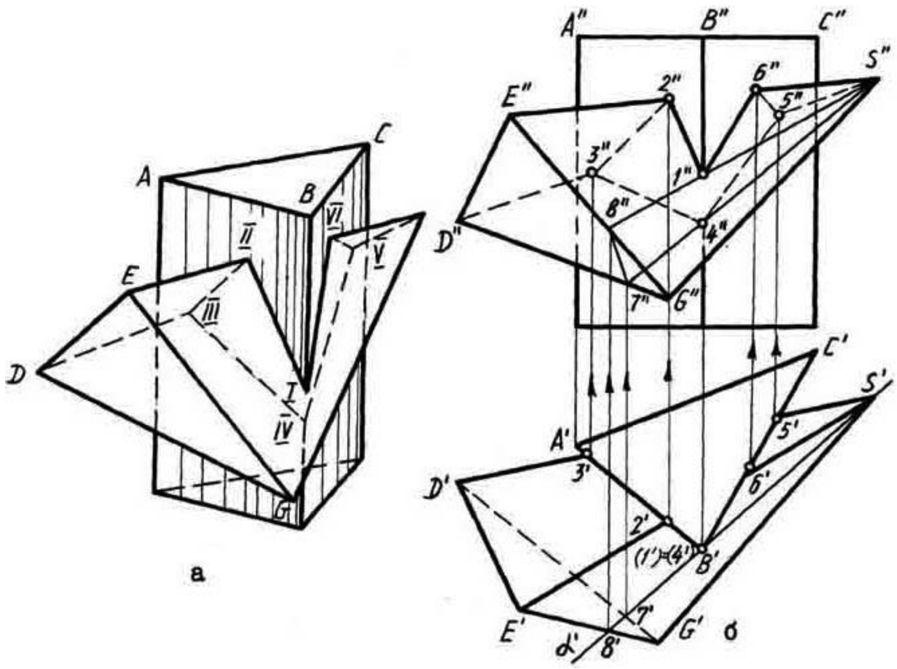


Рис.1.114

Грани призмы - горизонтально проецирующие плоскости, поэтому горизонтальные проекции фигуры сечения будут совпадать с горизонтальной проекцией призмы. Учитывая это, целесообразно применить первый способ решения задачи. Отметим горизонтальные проекции 2', 3', 5', б' точек пересечения ребер пирамиды с призмой, определим их фронтальные проекции.

Для определения точек пересечения ребра В призмы с пирамидой через ребро В и вершину S проведена горизонтально-проецирующая плоскость α, которая пересекает пирамиду по треугольнику S-7-8.

На пересечении фронтальных проекций S"7", S"8" и ребра B" отмечены точки 1" и 4". Полученные точки на одних и тех же гранях соединены отрезками прямых. В сечении получен пространственный многоугольник 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1. С учетом изложенного выше правила отмечены видимые и невидимые стороны многоугольника.

ГЛАВА VII. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПРОСТЕЙШЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

§18. Алгоритм решения задачи

Относительное расположение линии и поверхности устанавливается с помощью последовательности геометрических построений, которую условимся называть алгоритм №3. Он состоит в следующем (рис.1.115):

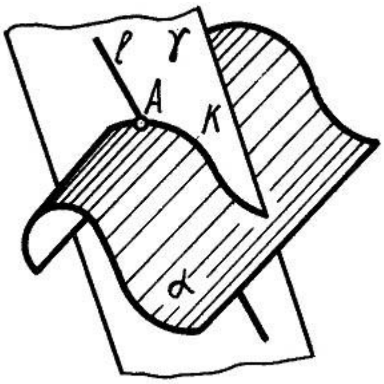


Рис.1.115

- заключаем данную линию во вспомогательную поверхность $l \in \gamma$;

- определяем линию пересечения вспомогательной поверхности с заданной $k = \alpha \cap \gamma$, т.е. последовательно выполняем алгоритм №2;

- отмечаем точку пересечения полученной и заданной линий $A = k \cap l$. Точка A - искомая. $A = (\alpha \cap \gamma) \cap l$.

Вспомогательную поверхность γ называют посредником. Вид и расположение этой поверхности следует выбирать так, чтобы линия пересечения ее с заданной поверхностью, по возможности, была простейшей.

§19. Пересечение прямой с плоскостью

Для решения задачи на пересечение прямой с плоскостью (рис.1.116) используют приведенный алгоритм №3. $B = (\gamma \cap \alpha) \cap l$.

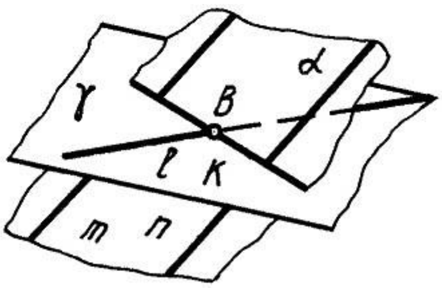


Рис.1.116

В качестве вспомогательных секущих поверхностей выбирают плоскости частного положения. При этом решение задачи упрощается, так как отпадает необходимость в решении алгоритма №2.

Пример 1. Найти точку пересечения прямой общего положения k и плоскости β (m||n) (рис.1.117).

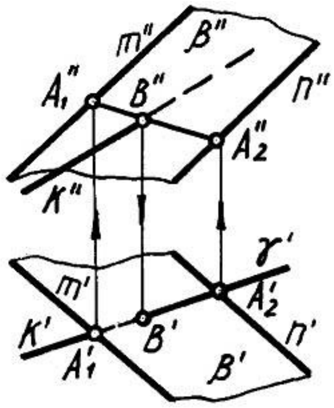


Рис.1.117

План решения:

- через прямую k проводим горизонтально проецирующую плоскость γ;

- находим линию пересечения плоскостей β и γ. $A_1A_2=\gamma\cap\beta$;

- определяем точку пересечения прямой k с прямой A_1A_2. $B=k\cap A_1A_2$ - точка B является искомой.

Пример 2. Найти точку пересечения прямой с плоскостью (рис.1.118а, б).

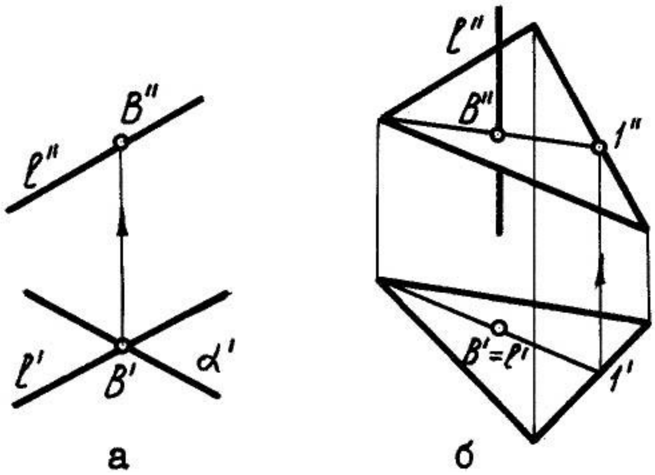


Рис.1.118

Прямая или плоскость занимают в данном случае частное положение. Определение точек пересечения прямых в обоих случаях хорошо видно из чертежа.

Пример 3. Найти точку пересечения прямой k с плоскостью α, заданной следами (рис.1.119).

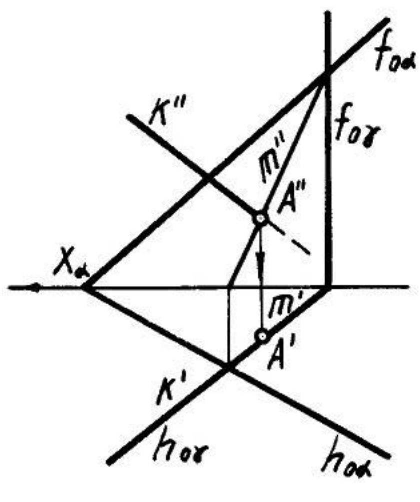


Рис.1.119

Заключим заданную прямую в горизонтально-проецирующую плоскость γ. Эту плоскость также зададим следами.

Далее построим линию пересечения плоскостей m=α⌒γ. Искомую точку A пересечения с плоскостью отметим на пересечении линий m и k.

При пересечении прямой линии с непрозрачной плоскостью (рис.1.120) на каждой из проекций чертежа один участок прямой будет видимым для наблюдателя, другой участок - невидимым.

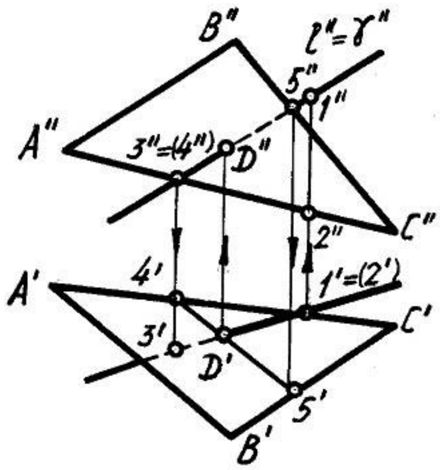


Рис.1.120

Границей участков является точка пересечения D. Задача определения этих участков на чертеже может быть решена при помощи способа конкурирующих точек. Сущность его состоит в следующем (рис.1.121).

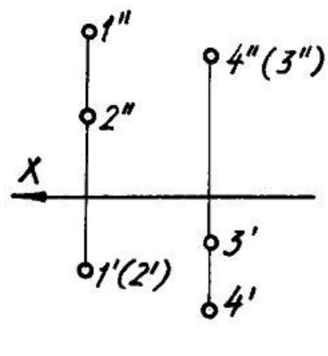


Рис.1.121

Если точки 1 и 2 находятся на одной проецирующей к плоскости π_1, то на плоскости π_1, видимой будет точка 1, точка 2 - невидимая.

Аналогично рассуждая, можно определить видимость точек 3 и 4 на плоскости π_2. На рис.1.120 прямая l пересекает непрозрачную плоскость ABC. Построена точка пересечения $D=l\cap ABC$.

Для установления видимости участков прямой l на плоскости π_1, использованы конкурирующие точки $1\in l$ и $2\in AC$. На плоскости π_2 видимость участков установлена с помощью конкурирующих точек $3\in l$ и $4\in AC$.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости. Если $l\|m$, а $m\in\alpha$, то $l\in\alpha$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Через точку A провести прямую l, параллельную плоскости α, заданной треугольником (рис.1.122).

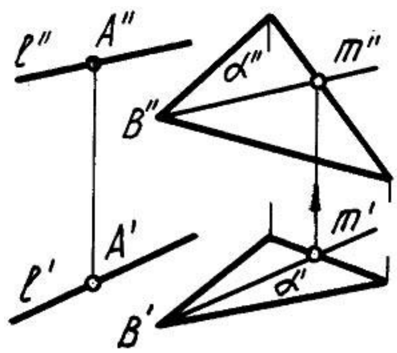


Рис.1.122

Возьмем в плоскости α точку B (B', B'') и через нее проведем прямую m (m', m''), принадлежащую плоскости. Через горизонтальную проекцию точки A' проведем $l'\|m'$, а через фронтальную A'' - $l''\|m''$. Прямая l (l', l'') - искомая. Очевидно, через одну точку, не принадлежащую плоскости, можно провести множество прямых, параллельных данной плоскости.

Пример 2. Определить, параллельна ли прямая l (l', l'') плоскости β ($h_{0\beta}$, $f_{0\beta}$) (рис.1.123).

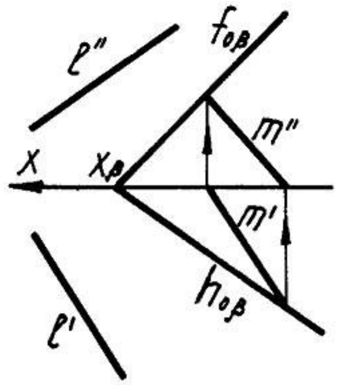


Рис.1.123

План решения задачи на чертеже:

- проводим горизонтальную проекцию m'||l'. Прямая m∈β;

- находим фронтальную проекцию m'';

- сравниваем l'' и m''. Если l''||m'', то, прямые l и m параллельны. Следовательно, l||β. В рассматриваемой задаче l не параллельна β, т. к. l'' не параллельна m''.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости (рис.1.124а, б).

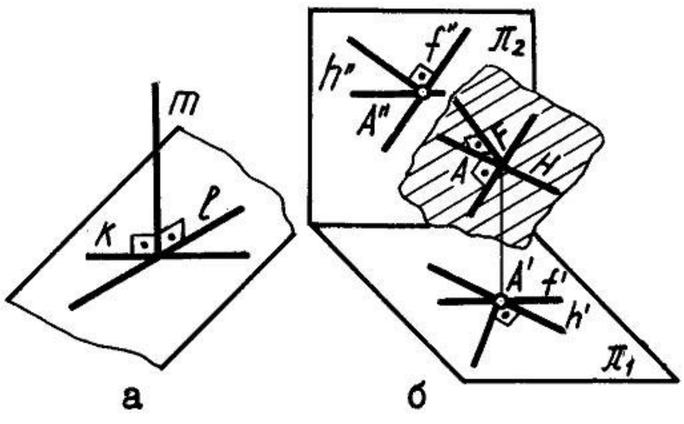


Рис.1.124

Если в плоскости взять не произвольные прямые, а горизонталь и фронталь, то для построения проекций перпендикуляра можно воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (рис.1.124б). В этом случае угол между перпендикуляром и горизонталью, а также между перпендикулярам и фронталью будет проецироваться без искажения соответственно на плоскости π_1 и π_2. Отсюда вывод: чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция - фронтальной проекции фронтали плоскости.

Если плоскость задана следами, проекции перпендикуляра будут перпендикулярны одноименным следам.

Установленная таким образом зависимость между прямой, перпендикулярной плоскости, и проекциями этой прямой к проекциям линий уровня (следам) плоскости, лежит в основе графического решения задач на проведение прямой, перпендикулярной плоскости, а также на построение плоскости, перпендикулярной прямой.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Провести из точки А ($A \in \alpha$) перпендикуляр к плоскости α, заданной треугольником (рис.1.125).

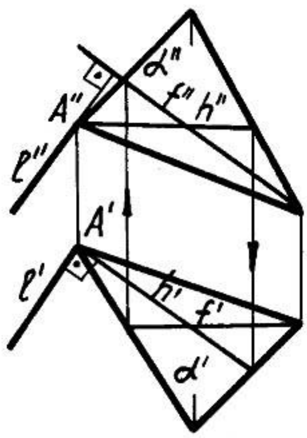


Рис.1.125

План решения и построения на чертеже:

- проводим в плоскости α горизонталь h (h', h'') и фронталь f (f', f'');

- из точки A' проводим прямую l', перпендикулярную h', а из точки A'' - прямую l'', перпендикулярную f''. $l' \perp h'$, $l'' \perp f''$, следовательно, $l \perp \alpha$.

Пример 2. Через точку А провести прямую l, перпендикулярную плоскости β, заданной следами A∉β (рис.1.126).

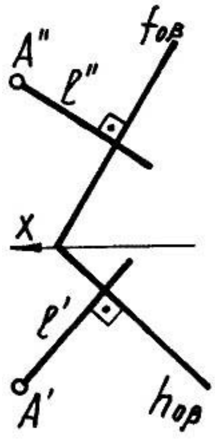


Рис.1.126

Для решения задачи достаточно провести через точку А' прямую $l' \perp h_{0\beta}$, а через А" - $l'' \perp f_{0\beta}$.

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости. Поэтому построение перпендикулярных плоскостей сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости. Решить эту задачу можно двумя путями:

- провести прямую l, перпендикулярную заданной плоскости α (рис.1.127), затем заключить прямую в какую-либо плоскость β, последняя будет искомой.

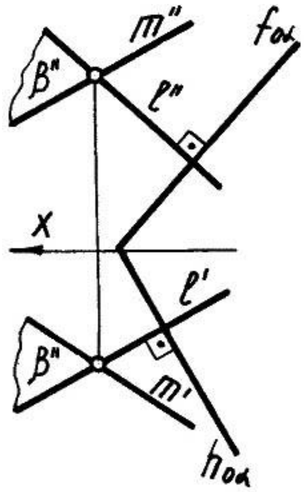


Рис.1.127

В данном случае плоскость задана двумя пересекающимися прямыми m и l. l⊥α, т.к. $l' \perp h_{0\alpha}$, $l'' \perp f_{0\alpha}$, m - произвольная прямая, пересекающая l. β=m∩l, β⊥α.

- Провести в заданной плоскости α прямую l и построить плоскость β, перпендикулярную этой прямой l (рис.1.128).

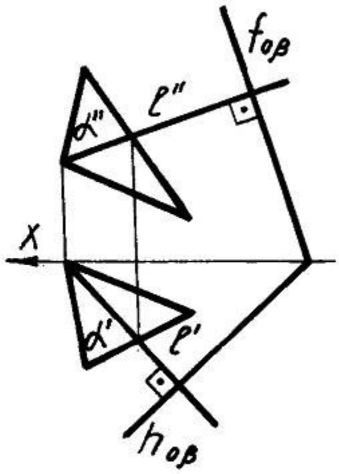


Рис.1.128

l∈α и l⊥β. Следовательно, β⊥α. На чертеже $l' \perp h_{0\beta}$, $l'' \perp f_{0\beta}$. Таких плоскостей можно провести множество.

§20. Пересечение прямой с поверхностью вращения и многогранником

Для нахождения точек пересечения (входа и выхода) прямой с поверхностью используют алгоритм №3 (рис.1.115). Так как линия прямая, то в качестве вспомогательной поверхности используют плоскость частного положения. В этом случае упрощается построение линии ее пересечения с поверхностью. После нахождения точек пересечения на чертеже следует отметить видимые и невидимые участки прямой линии.

Пример 1. Найти точки пересечения прямой l с заданной поверхностью σ (рис.1.129).

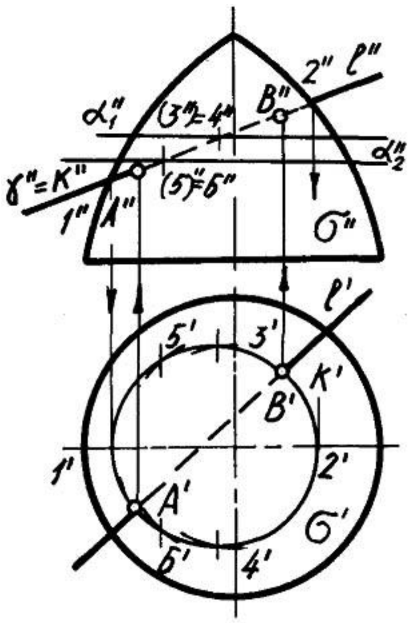


Рис.1.129

Заключаем прямую во фронтально-проецирующую плоскость γ.

Находим линию k, по которой плоскость посредник γ пересечет поверхность σ.

Для этого выполняем последовательно операции алгоритма №2:

- отмечаем характерные точки 1 и 2;

- вводим горизонтальную плоскость посредник α_1, и строим точки 3 и 4;

- вводим горизонтальную плоскость посредник α_2, и строим точки 5 и 6 и т.д.

Строим горизонтальную проекцию линии $\gamma\cap\sigma=(1\cup2\cup3...)$. Отмечаем точки А и В пересечения прямой l и линии k. Эти линии пересекаются, т.к. принадлежат одной плоскости γ. Точки А и В - искомые точки пересечения прямой с поверхностью. Отмечаем видимые и невидимые участки прямой l.

Рассмотрим ряд случаев, когда прямая или поверхность занимают частное положение.

Пример 2. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью сферы (рис.1.130).

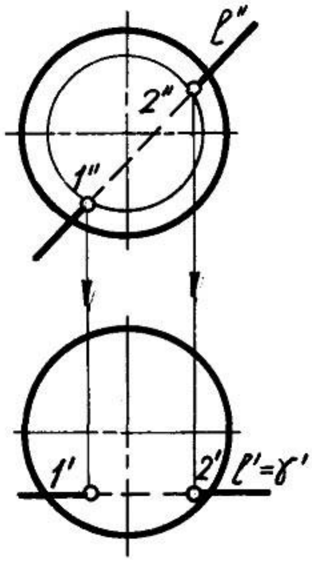


Рис.1.130

Заключаем прямую во фронтальную плоскость γ. Окружность пересечения этой плоскости со сферой проецируется на плоскость π_2 без искажения. На пересечении фронтальной проекции окружности и заданной прямой находим фронтальные проекции 1" и 2" искомых точек. Далее определяем горизонтальные проекции этих точек. Отмечаем видимость участков прямой.

Пример 3. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью сферы (рис.1.131).

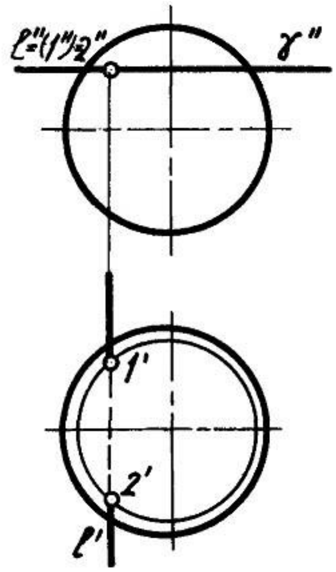


Рис.1.131

Построение видно из рисунка.

Пример 4. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью прямого кругового конуса (рис.1.132).

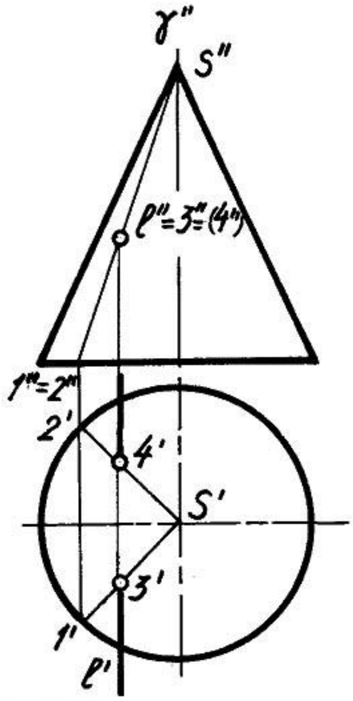


Рис.1.132

Прямая $l \perp \pi_2$ и фронтальные проекции точек пересечения будут совпадать с фронтальной проекцией прямой l'. Для построения горизонтальной проекции через прямую l проведем фронтально-проецирующую плоскость γ, проходящую через вершину конуса. Проведенная плоскость пересечет конус по образующим, на которых лежат искомые точки пересечения 3 и 4.

Пример 5. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью прямого кругового цилиндра (рис.1.133).

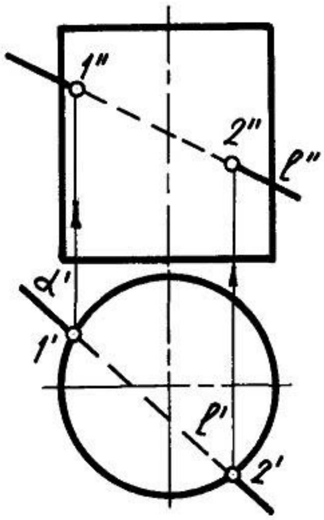


Рис.1.133

Отмечаем горизонтальные проекции 1', 2' точек пересечения. Фронтальные проекции 1", 2" находим на l" с помощью линий связи.

§21. Пересечение многогранника прямой линией

Точки пересечения гранных поверхностей прямой линией находят, применяя последовательность графических операций (алгоритм №3).

Пример 1. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью пирамиды (рис.1.134).

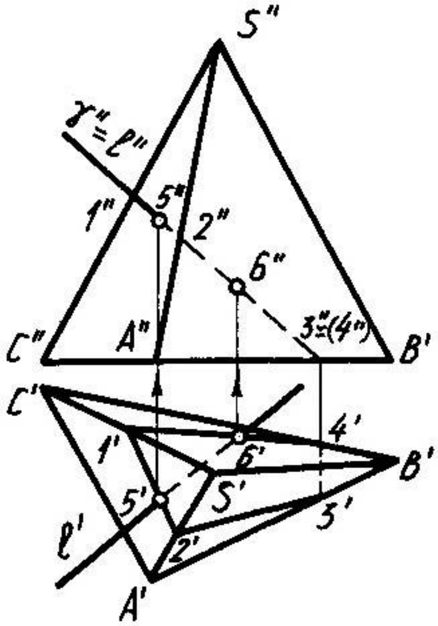


Рис.1.134

Заключаем прямую во фронтально проецирующую плоскость γ, которая пересечет поверхность пирамиды по четырехугольнику 1, 2, 3, 4. На пересечении горизонтальных проекций полученного четырехугольника и заданной прямой отмечаем горизонтальные проекции точек 5 и 6. Затем находим их фронтальные проекции. Отмечаем видимость.

Пример 2. Найти точки пересечения прямой l с поверхностью призмы (рис.1.135).

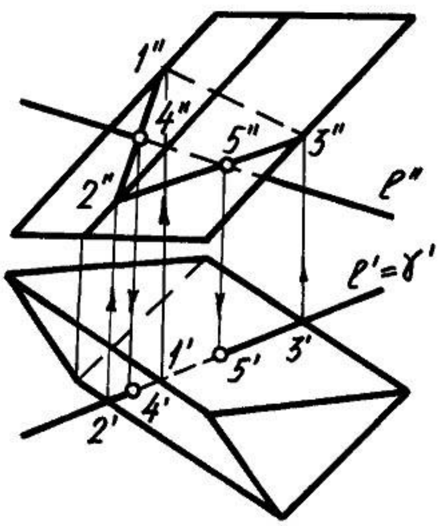


Рис.1.135

Решение аналогичное.

ГЛАВА VIII. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

§22. Способ замены плоскостей проекций

Решение многих задач в инженерной графике сводится в определению позиционных и метрических характеристик геометрических образов. В связи с этим все многообразие задач может быть отнесено к двум типам: позиционные и метрические.

Решение задач позиционных и главным образом метрических значительно осложняется тем, что входящие в условия этих задач геометрические образы заданы относительно плоскостей проекций в общем положении и проецируются на них искажением. Решение таких задач можно упростить, если преобразовать чертеж так, чтобы данные в условии элементы занимали частные положения относительно плоскостей проекций. При этом наиболее выгодным частным положением проецируемого образа следует считать:

- положение перпендикулярное к плоскости проекций (для решения позиционных, а в некоторых случаях и метрических задач);

- положение параллельное по отношению к плоскости проекций (при решении метрических задач).

Перейти от общего положения геометрической фигуры к частному можно различными способами:

- заменить данную систему плоскостей π_2/π_1 проекций новой - π_4/π_1 (рис.1.136).

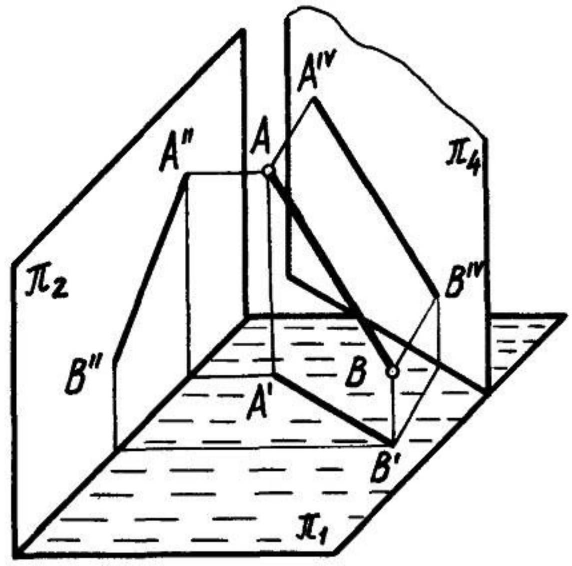


Рис.1.136

- Переместить объект (AB) в пространстве так, чтобы он оказался в частном положении относительно неизменной системы плоскостей проекций ($AB_1 \| \pi_2$) (рис.1.137).

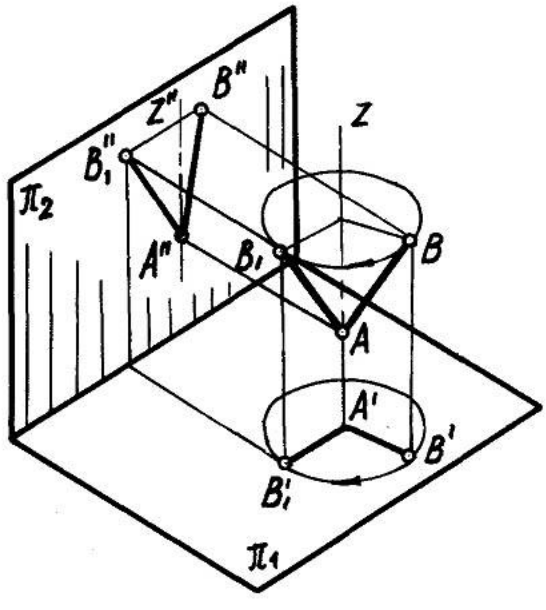


Рис.1.137

- Изменить направление проецирования (рис.1.138).

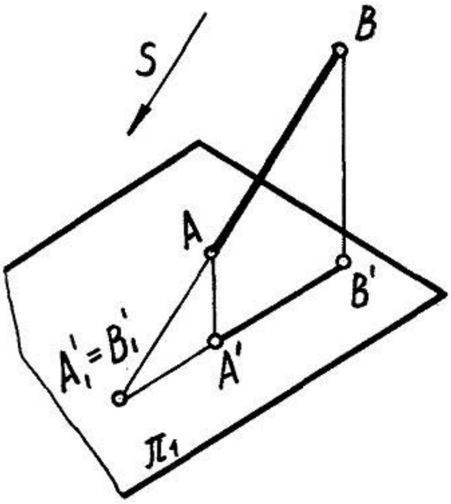


Рис.1.138

В настоящем курсе рассматривается только первый из перечисленных способов.

§23. Основные типы задач, решаемые этим способом

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что одна из плоскостей заменяется новой плоскостью - π_4, подходящим образом расположенной относительно оригинала, но перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций (рис.1.139, рис.1.140).

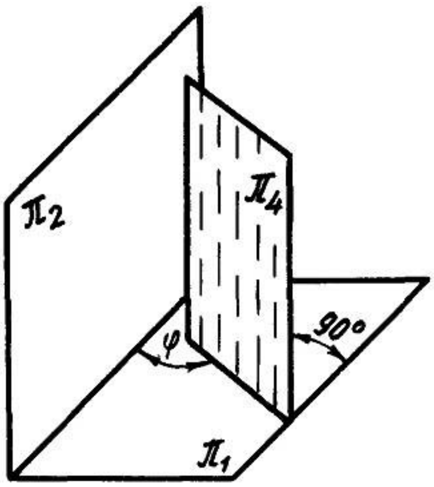


Рис.1.139

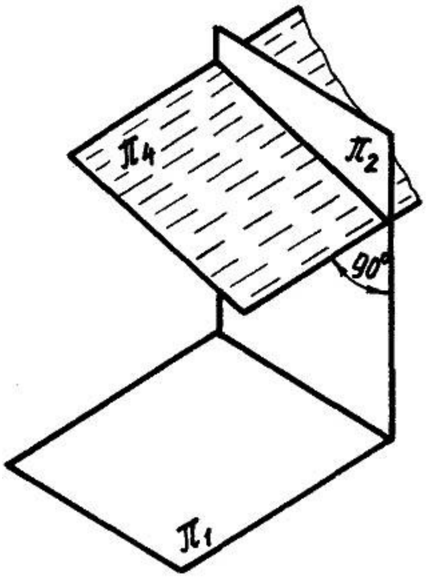


Рис.1.140

В ряде случаев для получения новой системы плоскостей проекций, разрешающих задачу, недостаточно одной замены, тогда последовательно вводят вторую плоскость π_5 (рис.1.141) перпендикулярную плоскости π_4.

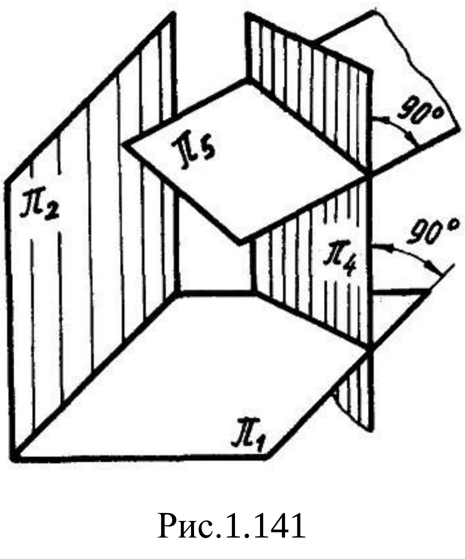


Рис.1.141

Линия пересечения плоскостей проекций в новой системе называется новой осью проекций и обозначается π_4/π_1, π_4/π_5, ...

Преобразование проекций любой геометрической фигуры сводится к преобразованию проекций точек, принадлежащих данной фигуре. Поэтому рассмотрим, какие изменения претерпевают проекции отдельной точки при переходе от одной системы плоскостей проекций к другой. На рис.1.142 дано изображение в пространстве точки A в системе π_2, π_1.

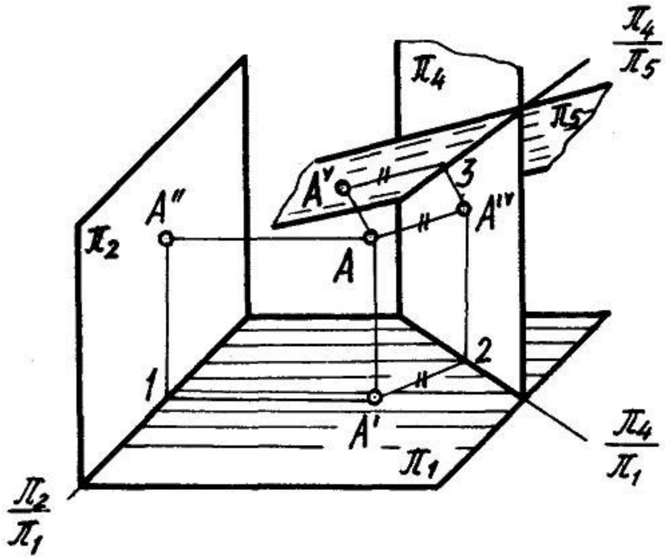


Рис.1.142

Заменим плоскость π_2 на новую - π_4, перпендикулярную π_1, т.е. перейдём от системы π_2, π_1 к системе π_4, π_1 и построим проекцию точки A^{IV} на плоскость π_4. Так как горизонтальная плоскость проекций является общей для старой и новой системы, координата z и горизонтальная проекция точки A остаются неизменными. Следовательно, $A^{IV}2=A''1=AA'$. Что же касается координаты y точки A, то она будет иной и определяется расстоянием от A до π_4. Для получения чертежа точки A в новой системе (рис.1.143) проведем ось π_4/π_1 под углом φ к оси π_1/π_2, равным углу между плоскостями π_4 и π_2.

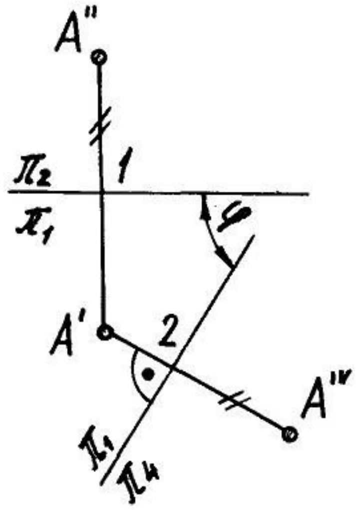


Рис.1.143

Затем проведем новую линию связи A'2, перпендикулярную оси, и на ней от точки 2 откладываем $A^{IV}2=A''1$. Таким образом, получим новую проекцию A^{IV} на π_4. Аналогично можно провести замену π_1 на π_5 (рис.1.144).

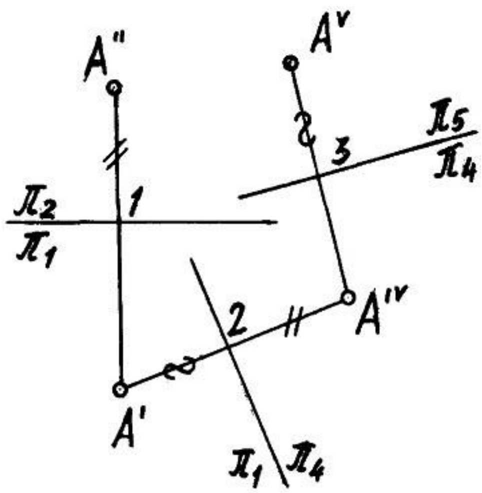


Рис.1.144

Итак, при замене фронтальной плоскости проекций последовательность выполнения операций (алгоритм преобразования) следующая:

- вводим новую плоскость проекций π_4 перпендикулярно незаменяемой плоскости π_1;

- проводим ось новой системы, которая будет пересекаться со старой осью под углом, равным углу между плоскостями π_4 и π_1;

- для нахождения новой фронтальной проекции точки проведем линию связи через горизонтальную проекцию точки, перпендикулярную оси π_4/π_1, и отложим на ней расстояние $A^{IV}2=A''1$.

Горизонтальная проекция точки остается неизменной. Аналогично решается задача при замене горизонтальной плоскости проекций.

Новая система плоскостей проекций выбирается так, чтобы получить положение оригинала, наиболее удобное для решения задачи. Все правила и свойства, рассмотренные ранее, применительно к ортогональному проецированию остаются в силе и в новой системе плоскостей проекций. При необходимости провести вторую замену (рис.1.142) поступаем следующим образом: заменяем π_1 на π_5, которую проводим перпендикулярно π_4.

При второй замене остаются неизменными положение проекции и удаление точки A от плоскости π_4.

На чертеже для построения A^V проводим ось π_4/π_5, линию связи, ей перпендикулярную, и откладываем расстояние $A^V3=A'2$.

При решении задач необходимо преобразовать чертеж так, чтобы геометрические элементы (прямые, плоскости) занимали в новой системе частное положение - параллельное или перпендикулярное одной из плоскостей проекций. Следовательно, можно выделить четыре исходные задачи преобразования чертежа.

Первая исходная задача преобразования чертежа - преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения стала прямой, параллельной плоскости проекций.

Для решения задачи (рис.1.145) заменим π_2 на π_4, $\pi_4 \perp \pi_1$, т.е. переходим от системы плоскостей π_2, π_1 к π_4, π_1 при этом $\pi_4 \| AB$.

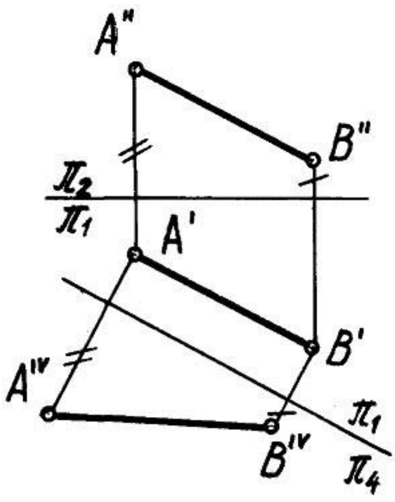


Рис.1.145

На чертеже ось π_4/π_1 должна быть параллельна A'B'. Используя изложенный порядок построения, находим новую проекцию $A^{IV}B^{IV}$.

Вторая исходная задача преобразования чертежа - преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения заняла положение проецирующей. Для решения этой задачи (рис.1.146) нельзя ограничиться одной заменой, так как невозможно в общем случае расположить новую плоскость - π_4 перпендикулярно одновременно прямой AB и плоскости π_1.

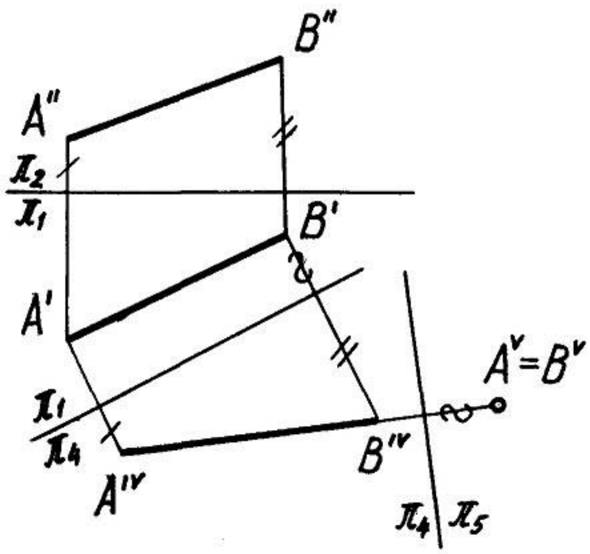


Рис.1.146

Поэтому для решения задачи следует заменять плоскости проекций дважды. При первой замене $\pi_4 || AB$, при второй - $\pi_5 \perp AB$.

План решения и построения на чертеже:

- $\pi_2, \pi_1 \rightarrow \pi_4, \pi_1$. Проводим $\pi_4/\pi_1 || A'B'$ и находим $A^{IV}B^{IV}$;

- $\pi_4, \pi_1 \rightarrow \pi_4, \pi_5$. Проводим $\pi_4/\pi_5 \perp A'B'$ и находим $A^{V}B^{V}$. Проекция $A^{V}B^{V}$ вырождается в точку, так как $AB \perp \pi_5$.

Третья исходная задача преобразования чертежа - преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей (рис.1.147, рис.1.148).

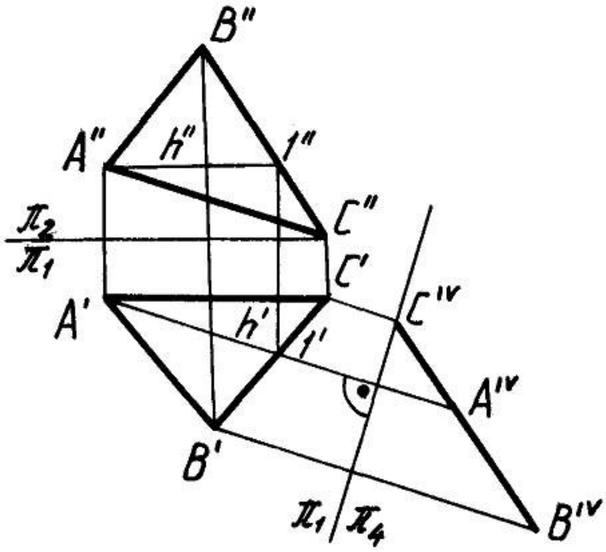


Рис.1.147

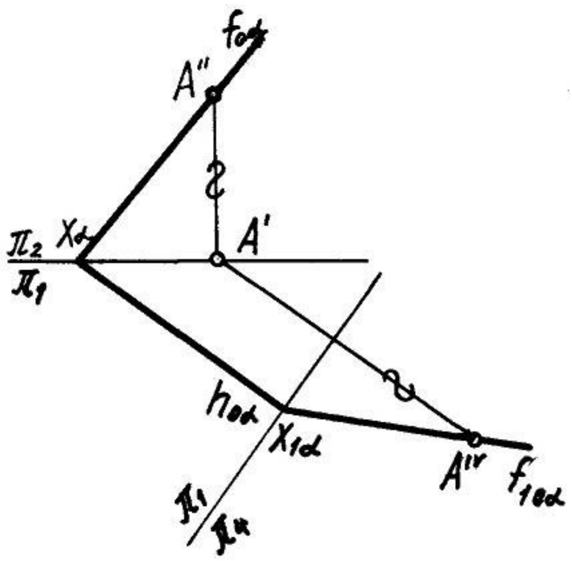


Рис.1.148

Плоскость можно представить как множество прямых уровня, например горизонталей. Для преобразования прямой уровня в проецирующую достаточно выполнить замену одной плоскости (вторая часть второй исходной задачи). Следовательно, для того чтобы плоскость общего положения стала проецирующей, достаточно одной замены и новую плоскость следует расположить перпендикулярно к прямым уровня заданной плоскости, параллельным незаменяемой плоскости проекций.

План решения и построения на чертеже:

- $\pi_2, \pi_1 \rightarrow \pi_4, \pi_1$. При этом $\pi_4 \perp h$ (рис.1.147);

- построим проекции $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ вершин треугольника ABC. В системе плоскостей проекций π_4, π_1 плоскость ABC - фронтально-проецирующая. Проекция $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ плоскости - прямая линия.

В случае, когда плоскость задана следами (рис.1.148), после введения новой плоскости $\pi 4 \perp h_{0\alpha}$:

- определим новую точку схода следов $X_{1\alpha} = h_{0\alpha} \cap \pi_4/\pi_1$;

- выберем произвольную точку A (A', A") на $f_{0\alpha}$ и найдем ее проекцию A^{IV} на плоскости π_4;

- соединив $X_{1\alpha}$ с A^{IV}, получим фронтальный след $f_{10\alpha}$ в системе π_4, π_1.

Четвертая исходная задача преобразования чертежа - преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня.

Для решения этой задачи в общем случае следует произвести две замены плоскостей проекций (рис.1.149):

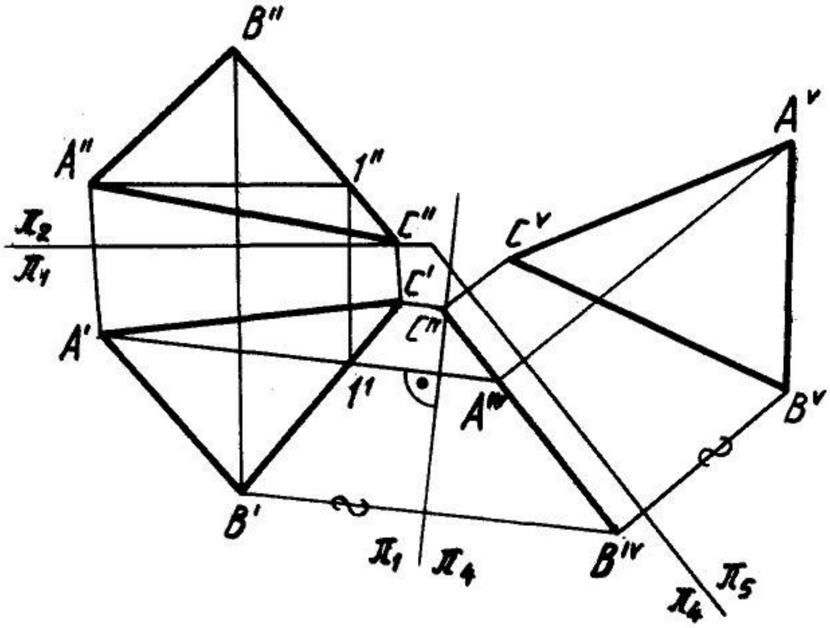


Рис.1.149

- π_2, π_1 → π_4, π_1, π_4 - перпендикулярна к прямой уровня заданной плоскости;

- π_4, π_1 → π_4, π_5, π_5 - параллельна заданной плоскости.

План решения и построения на чертеже:

- в плоскости ABC проводим горизонталь A1 (A'1', A"1");

- π_2, π_1 → π_4, π_1. При этом $\pi_4 \perp A1$. Проведем A'1' и находим проекцию $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$;

- π_4, π_1 → π_4, π_5. При этом $\pi_5 \| ABC$. Проводим $\pi_4/\pi_5 \| A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ и находим проекцию $A^{V}B^{V}C^{V}$. Плоскость треугольника параллельна плоскости π_5.

ГЛАВА IX. ПОВЕРХНОСТИ

§24. Определитель поверхности. Каркасный и кинематический способы задания поверхности

Поверхность представляет собой закономерное или незакономерное непрерывное множество точек.

Закономерные поверхности могут быть описаны алгебраическими или трансцендентными уравнениями. Задание поверхности уравнением - аналитический способ задания.

Если поверхность описывается алгебраическим уравнением n-ой степени, то поверхность считается n-го порядка. Произвольно расположенная секущая плоскость пересекает поверхность по кривой того же порядка, какой имеет поверхность (рис.1.150).

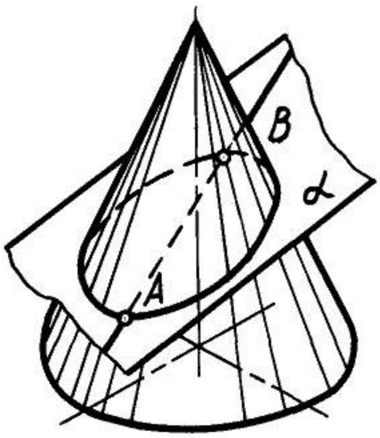


Рис.1.150

Порядок поверхности может быть определен числом точек ее пересечения с произвольной прямой (см. рис.1.150).

В начертательной геометрии поверхность рассматривают как множество всех последовательных положений движущейся линии. Эта линия называется образующей. Закон движения образующей в пространстве определяется неподвижными линиями - направляющими. Такой способ образования и задания поверхностей называется кинематическим (рис.1.151).

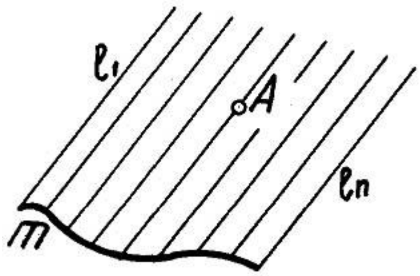


Рис.1.151

При этом способе образования поверхность считается заданной, если можно определить положение и форму образующей в любой момент ее движения, а это позволит ответить на вопрос, принадлежит ли точка пространства поверхности или нет (рис.1.151). Для однозначного определения поверхности заданы геометрические элементы (Г), определяющие образующую и направляющие, и алгоритм [А] формирования поверхности из этих геометрических элементов. Совокупность этих двух условий называют определителем поверхности σ(Г)[А]. Например, определитель цилиндрической поверхности σ(s, m)[A] (рис.1.152); геометрическая часть (s, m) - направление образующей и направляющая; алгоритмическая [А] - образующая движется, оставаясь все время параллельной заданному направлению s.

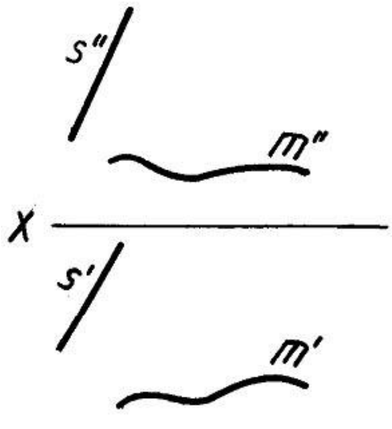


Рис.1.152

Чтобы задать поверхность на чертеже, нет необходимости указывать проекции всего множества линий, принадлежащих поверхности, достаточно указать проекции элементов, входящих в состав определителя. Например, на рис.1.152 задана цилиндрическая поверхность.

В зависимости от формы образующей, поверхности могут быть линейчатые, образующей которых является прямая линия, и нелинейчатые, образующая которых криволинейная. Нелинейчатые поверхности могут быть с образующей постоянного вида - поверхности, образующие которых не изменяют своей формы в процессе образования поверхности, и с образующей переменного вида - такие, образующая которых изменяется в процессе образования поверхности.

§25. Классификация поверхностей. Поверхности линейчатые

Различают линейчатые поверхности с одной направляющей, с двумя направляющими, с тремя направляющими.

Линейчатые поверхности с одной направляющей (торсы) образуются движением прямой линии, перемещающейся по определенному закону по одной направляющей.

К этой группе поверхностей относятся:

- поверхности цилиндрические,

- поверхности конические,

- поверхности с ребром возврата.

Цилиндрическая поверхность (рис.1.153) образуется движением прямой линии по кривой направляющей m.

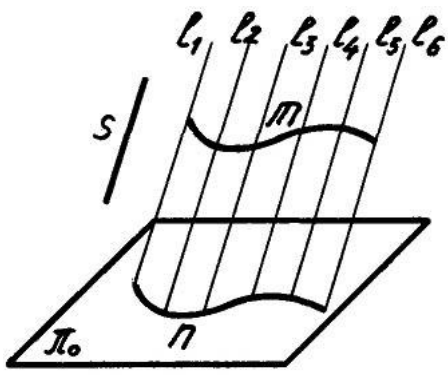


Рис.1.153

Образующая во всех положениях ($l_1 \dots l_6$) параллельна заданному направлению s. Определитель поверхности σ(s, m)[A]. При пересечении поверхности плоскостью π_0 получается след поверхности n.

Поверхность на чертеже может быть задана проекциями направляющей m (m', m'') и проекциями направления s (s', s'') (рис.1.154).

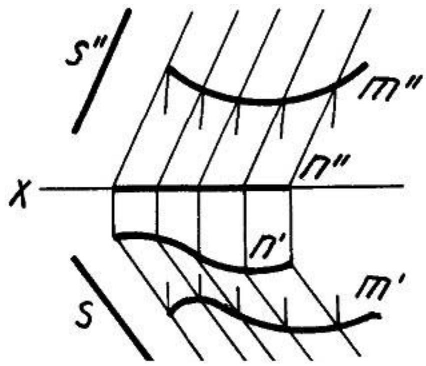


Рис.1.154

На чертеже также построен горизонтальный след n (n', n'') поверхности, который зачастую используется в качестве направляющей при задании чертежа поверхности.

Точки, принадлежащие цилиндрической поверхности, могут быть построены на ее чертеже при помощи проходящих через них образующих. Зачастую следует указывать, считается точка видимой или невидимой.

На рис.1.155 стрелками показано построение горизонтальной проекции точки 1, принадлежащей поверхности с заданной проекцией 1''.

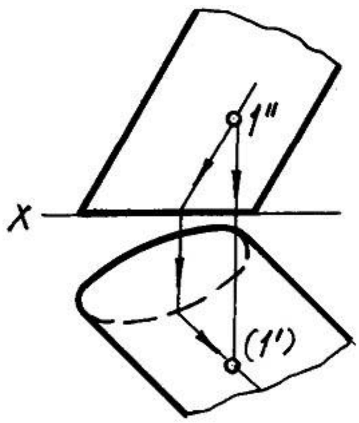


Рис.1.155

Указано, что на плоскости π_1, точка 1 невидимая.

Если направляющая - ломаная линия, то получим призматическую поверхность (рис.1.156).

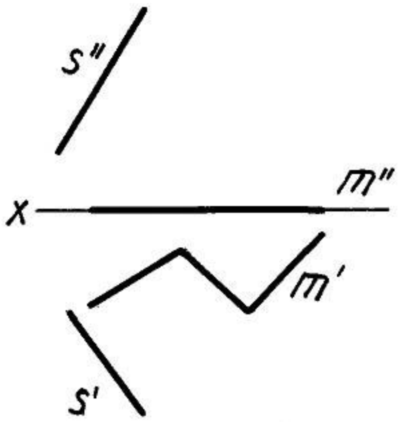


Рис.1.156

Если в нормальном сечении цилиндрической поверхности плоскостью (плоскость перпендикулярная образующим) получается неопределенная кривая, то имеем цилиндрическую поверхность общего вида.

Когда нормальное сечение - кривая второго порядка, то имеем цилиндрическую поверхность второго порядка. Различают цилиндр второго порядка эллиптический (круговой), параболический, гиперболический.

Коническая поверхность (рис.1.157) образуется движением прямой линии по кривой направляющей m, при этом образующие проходят через неподвижную точку S.

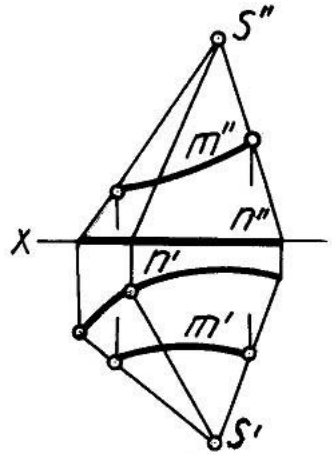


Рис.1.157

Определитель поверхности σ(m, s)[A]. На чертеже коническая поверхность задается проекциями направляющей m и точки S - вершины конуса. В качестве направляющей зачастую используют след поверхности на плоскости проекций (рис.1.157).

На рис.1.158 показано построение проекций точки 1, принадлежащей конической поверхности.

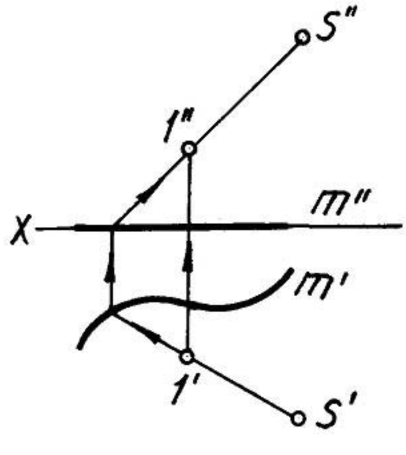


Рис.1.158

Частным случаем конической поверхности является поверхность пирамидальная. В этом случае направляющая поверхности - ломаная линия.

Коническая поверхность будет поверхностью второго порядка, когда направляющей поверхности является кривая второго порядка.

Поверхность с ребром возврата образуется непрерывным движением прямой линии (образующей), во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой (направляющей). Такая поверхность показана на рис.1.159.

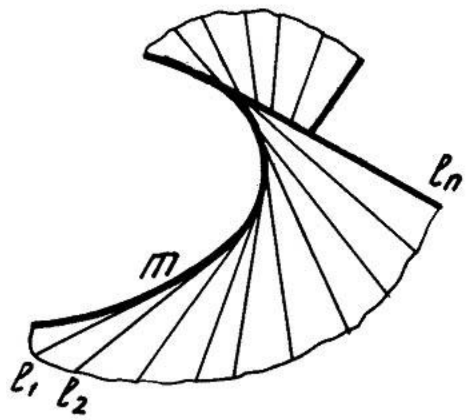


Рис.1.159

Пространственная кривая - направляющая, называется ребром возврата, она делит поверхность на две полости.

Кривые линейчатые поверхности с одной направляющей являются поверхностями развертываемыми, то есть они могут быть всеми своими точками совмещены с плоскостью, не претерпевая каких-либо повреждений (разрывов, складок).

Все кривые нелинейчатые поверхности и те линейчатые, которые не могут быть развернуты в плоскость, называются неразвертываемыми.

Линейчатые поверхности с двумя направляющими (криволинейными или прямолинейными).

Образующая при этом сохраняет постоянный угол с некоторой плоскостью.

Ограничимся рассмотрением случаев, когда образующая параллельна плоскости (поверхности с плоскостью параллелизма).

Определитель этой группы поверхностей σ(m, n, α)[A], где m, n - направляющие; α - плоскость параллелизма.

К числу поверхностей с плоскостью параллелизма относятся:

- цилиндроид (рис.1.160), когда обе направляющие являются кривыми линиями;

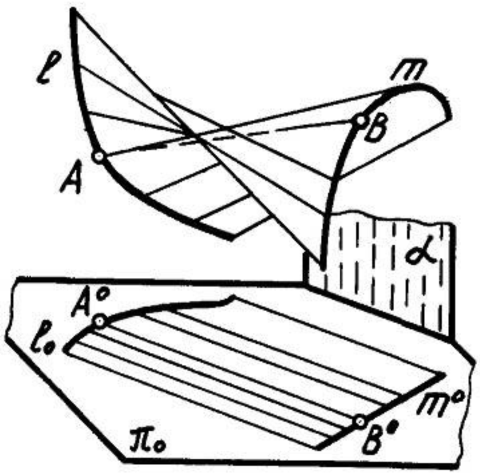


Рис.1.160

- коноид (рис.1.161) когда одна из направляющих - прямая линия;

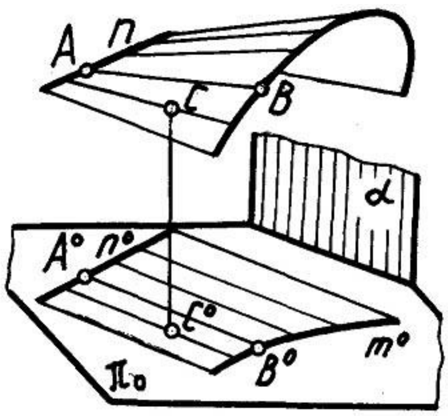


Рис.1.161

- косая плоскость (рис.1.162), когда обе направляющие - прямые линии.

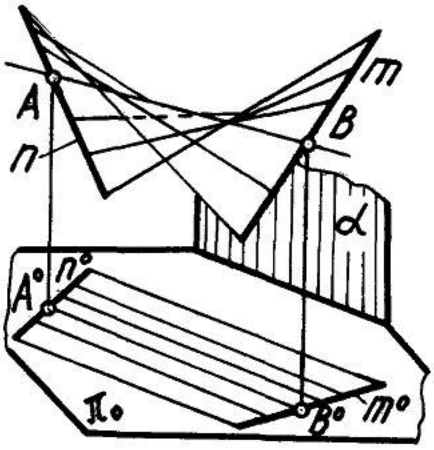


Рис.1.162

Чтобы задать эти поверхности на чертеже, достаточно указать проекции направляющих и плоскости параллелизма (рис.1.163).

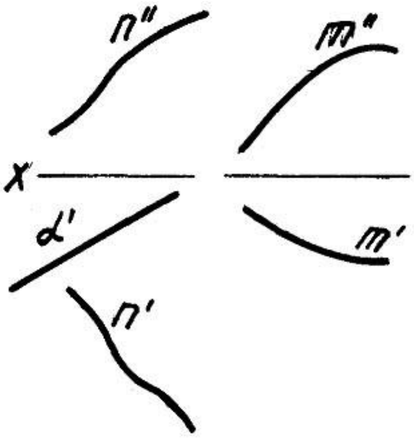


Рис.1.163

Задачи, связанные с построением проекций точек, принадлежащих поверхности с плоскостью параллелизма, рассмотрены в §27.

Винтовая поверхность образуется при движении прямой линии по двум направляющим, одна из которых винтовая линия, другая - ось винтовой линии. Из определения следует, что винтовая поверхность является коноидом. Ось винтовой линии пересекается с образующей под постоянным углом. Если этот угол равен 90°, то образуется прямая винтовая поверхность. Если угол не равен 90°, то винтовая поверхность носит название косой.

Прямая винтовая поверхность изображена на рис.1.164.

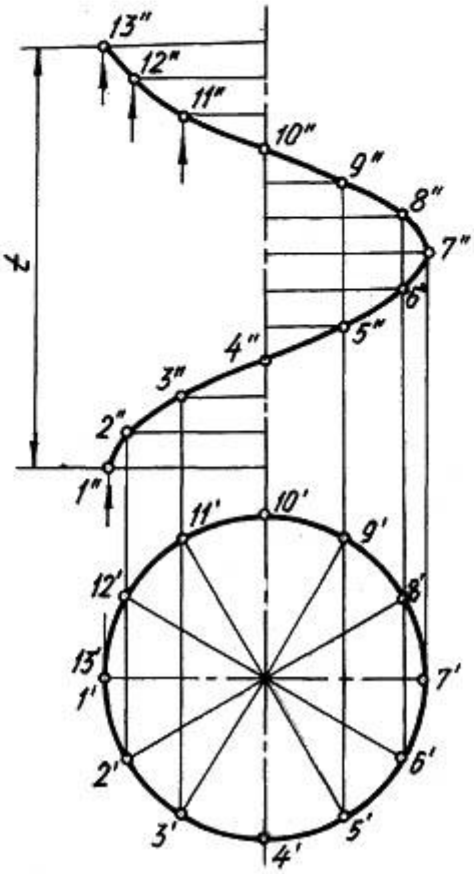


Рис.1.164

В сечении такой поверхности плоскостью, проходящей через ось или перпендикулярной оси, получается образующая поверхности.

В случае косой винтовой поверхности (рис.1.165) образующая сохраняет постоянный не равный 90° угол наклона к оси поверхности.

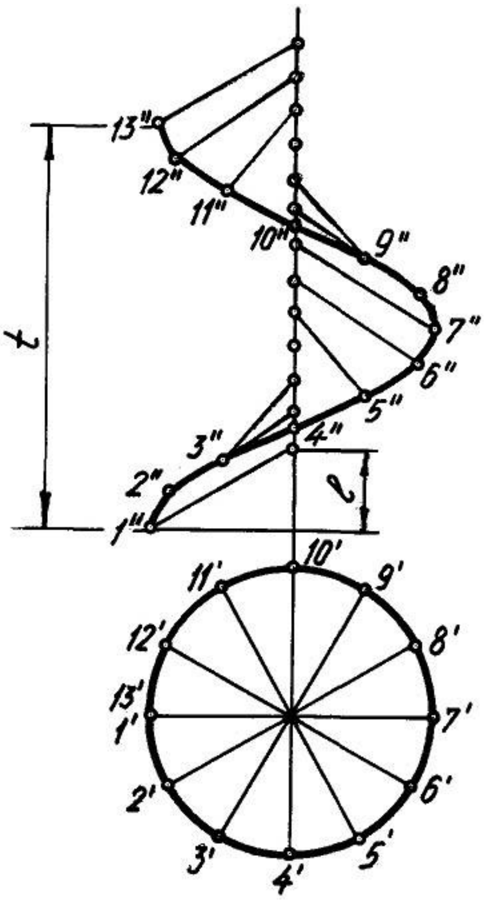


Рис.1.165

Следовательно, в этом случае проекции образующих на ось - величина постоянная (отрезок l на рис.1.165). Это используют при построении фронтальной образующей в любом положении. Расстояние t (рис.1.164, рис.1.165), на которое перемещается образующая винтовой поверхности, и совершает полный поворот вокруг оси винтовой линии - шаг винтовой поверхности.

Задачи, связанные с построением на чертеже проекций точки, принадлежащей винтовой поверхности, рассмотрены в §27.

Если плоская фигура (квадрат, треугольник, трапеция) движется по поверхности цилиндра так, что ее вершины перемещаются по винтовым линиям, а плоскость самой фигуры постоянно проходит через ось цилиндра, то получается винтовой выступ, ограниченный винтовыми и цилиндрическими поверхностями (рис.1.166, рис.1.167).

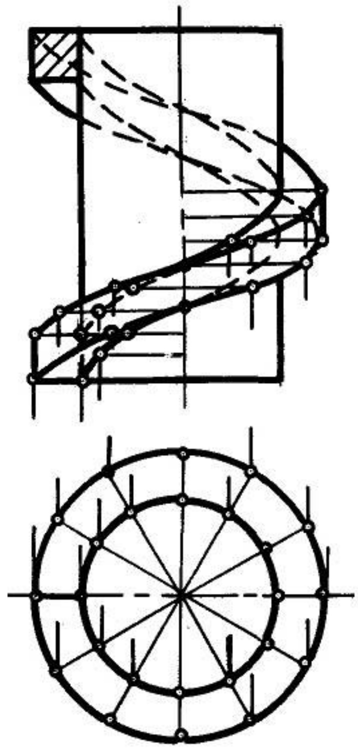


Рис.1.166

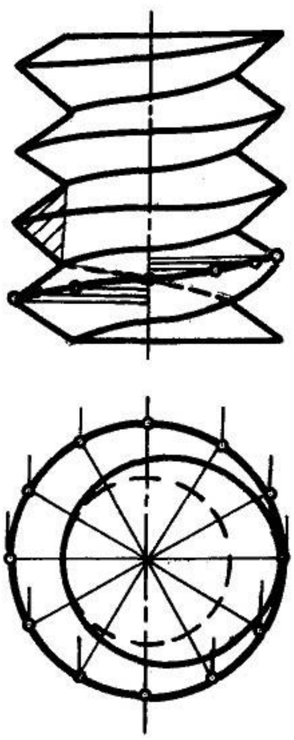


Рис.1.167

Построение проекций выступа сводится к построению винтовых линий - траекторий вершин движущейся плоской фигуры. Совокупность цилиндра и винтового выступа на нем называют винтом.

Винты с резьбой различного профиля (треугольной, квадратной, трапецеидальной и др.) широко применяются в технике в элементах соединения деталей, ходовых, грузоподъемных, транспортирующих и др. устройствах (см. рис.1.168, рис.1.169).

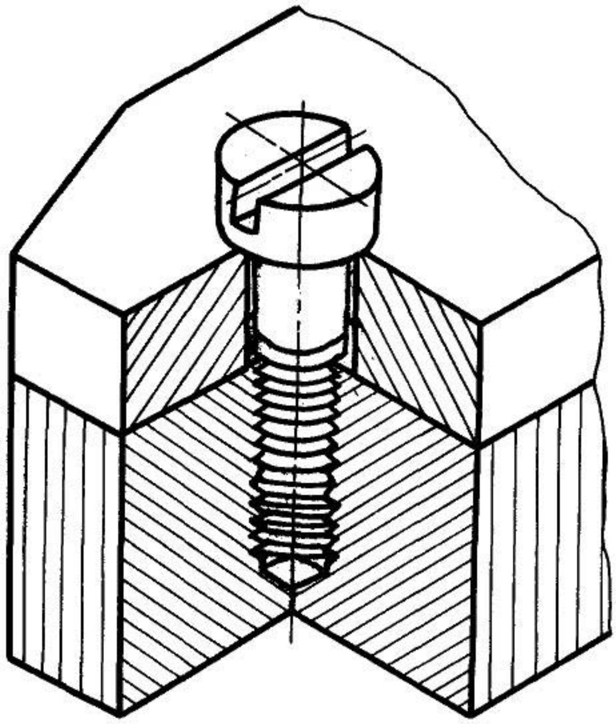


Рис.1.168

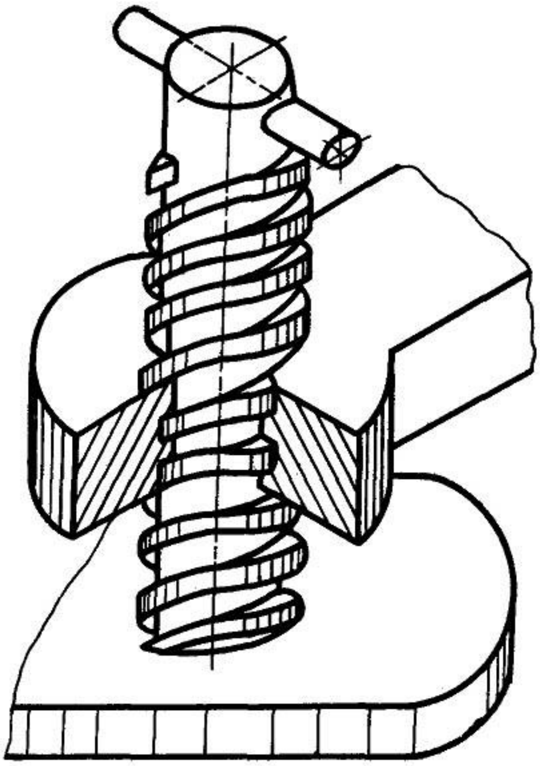


Рис.1.169

Линейчатые поверхности с тремя направляющими (рис.1.170) образуются движением прямой линии по трем направляющим (криволинейным или прямолинейным).

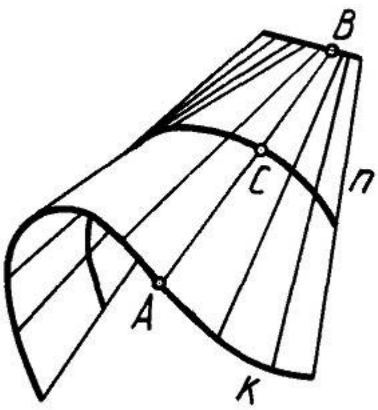


Рис.1.170

Положение образующих в этом случае однозначно определяется формой и положением в пространстве направляющих m, n, k. Определитель поверхности этой группы имеет вид σ(m, n, k).

§26. Поверхности нелинейчатые

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся поверхности, криволинейные образующие которых постоянного или переменного вида.

Поверхности второго порядка.

Кроме рассмотренных ранее поверхностей второго порядка (цилиндрических, конических) можно указать еще три поверхности нелинейчатые с переменной образующей:

- эллипсоид (рис.1.171) образуется движением деформирующегося эллипса ABCD, концы осей которого скользят по эллипсам AEBF и DECF.

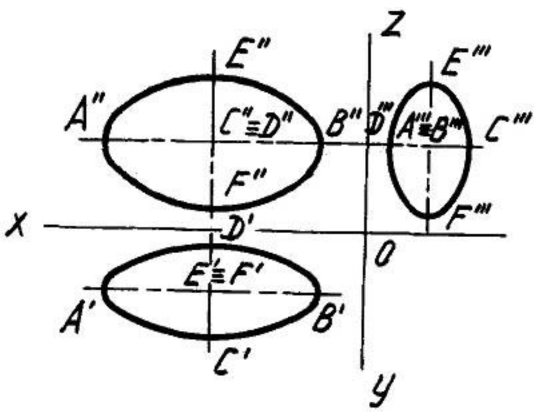


Рис.1.171

Плоскость движущегося эллипса параллельна π_1. При пересечении такой поверхности любой плоскостью получается эллипс. Если оси всех эллипсов равны, то получится сфера.

- Эллиптический параболоид может быть получен движением деформирующегося эллипса ABCD, плоскость которого параллельна π_1, а концы осей скользят по параболам AOB и COD (рис.1.172).

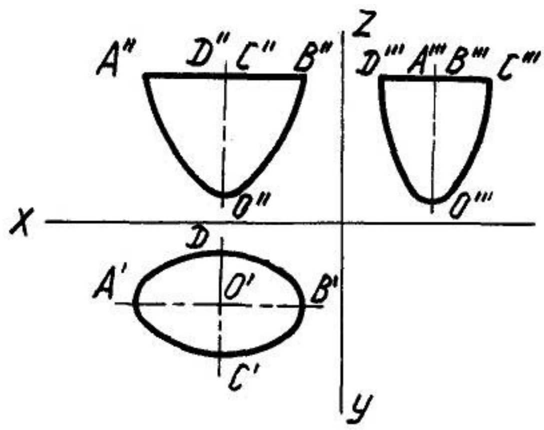


Рис.1.172

При пересечении поверхности плоскостью в сечении будут эллипсы или параболы. Если поверхность образуется деформирующейся окружностью, то в этом случае получим параболоид вращения.

- Двуполостной гиперболоид образуется движением деформирующихся эллипсов $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, плоскость которых перпендикулярна к оси поверхности, а концы осей эллипсов скользят по двум гиперболам (рис.1.173).

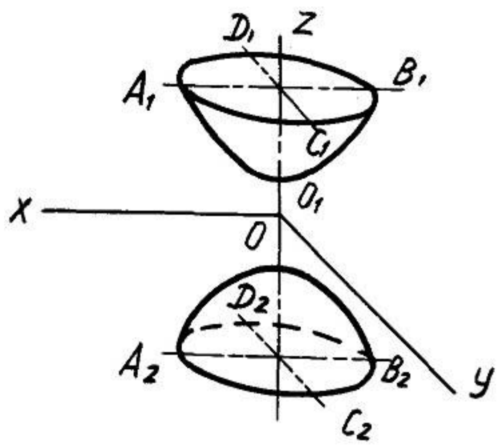


Рис.1.173

Если эллипсы заменить деформирующимися окружностями, то образуется двуполостный гиперболоид вращения.

Поверхности вращения рассмотрены ранее (§8).

Циклические поверхности образуются окружностью переменного радиуса, центр которой перемещается по криволинейной направляющей (рис.1.174).

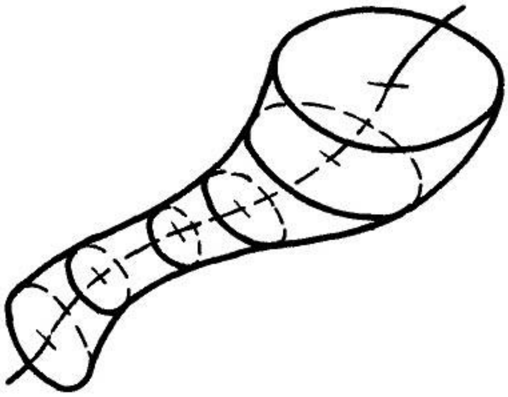


Рис.1.174

Если плоскость образующей окружности перпендикулярна к направляющей, то поверхность носит название каналовой.

Если образующая окружность имеет постоянный радиус, то поверхность называется трубчатой. Эта поверхность широко распространена в практике в виде поверхности трубопроводов, пружин с круглым сечением, проводов и т.п. Если направляющая поверхности прямолинейная, то каналовая поверхность становится поверхностью вращения.

Поверхность, задаваемая каркасом. Поверхность может быть задана достаточно плотной сетью линий или точек, принадлежащих этой поверхности. Совокупность точек или линий, определяющих поверхность, называется ее каркасом (рис.1.175).

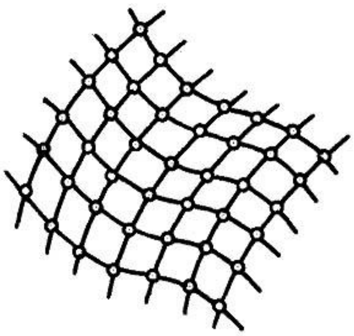


Рис.1.175

Примерами каркасных поверхностей могут служить поверхности корпусов самолетов, судов, автомобилей, баллонов кинескопов (рис.1.176).

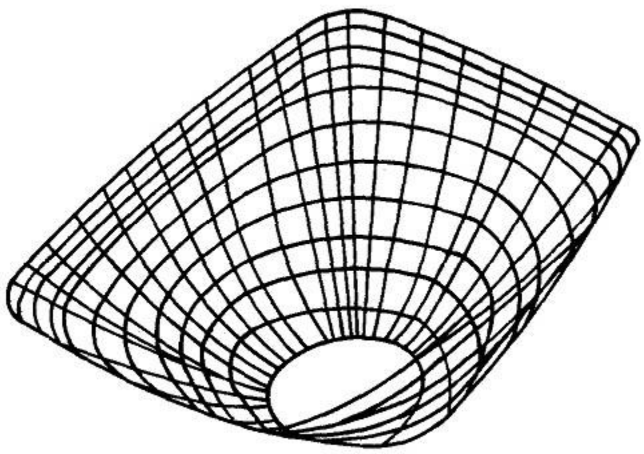


Рис.1.176

ГЛАВА X. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙЧАТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

§27. Задачи с линейчатыми поверхностями

Если в отличие от случаев, рассмотренных в §25, линейчатые поверхности (коническая, цилиндрическая) занимают в системе общее положение, то линия их взаимного пересечения может быть найдена с помощью посредников - плоскостей общего положения.

При пересечении двух конических поверхностей (рис.1.177) последовательность операций (алгоритм №2) для построения точек линии пересечения следующая:

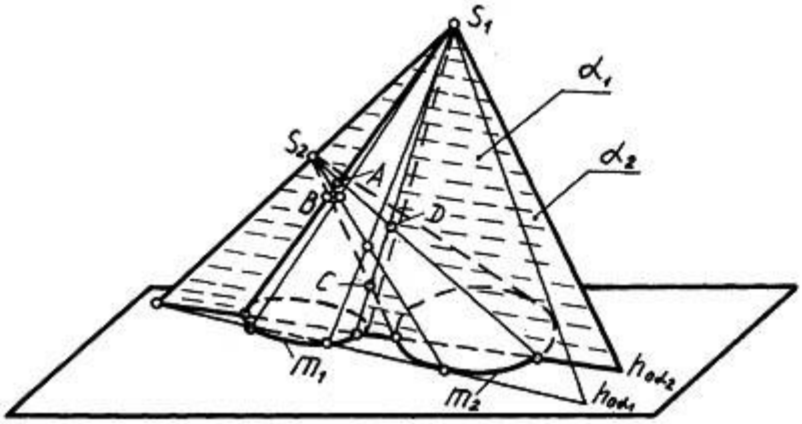


Рис.1.177

- через вершины S_1, и S_2 конических поверхностей проводят прямую линию и заключают ее последовательно в ряд плоскостей посредников α_1, α_2... Каждая такая плоскость пересекает обе поверхности по образующим. Образующие можно построить с использованием точек пересечения следа секущей плоскости $h_{0\alpha 1}$, $h0_{\alpha 2}$... со следом конической поверхности m_1, m_2 на плоскости проекций. Пересечение образующих, лежащих в одной секущей плоскости, происходит в точках A, B, C, D..., принадлежащих линии пересечения конических поверхностей.

На рис.1.178 показан пример нахождения линии пересечения конической и цилиндрической поверхностей.

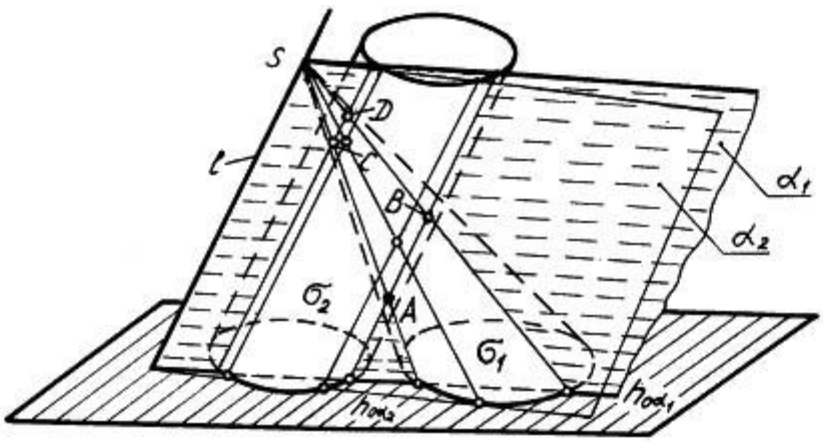


Рис.1.178

Прямая l, через которую проходит пучок секущих плоскостей посредников, в этом случае проходит через вершину конической поверхности параллельно образующей цилиндрической поверхности. Каждая плоскость этого пучка пересекает обе поверхности по образующим. Дальнейшее решение задач не отличается от решения в предыдущем случае.

При пересечении двух произвольно расположенных цилиндрических поверхностей (рис.1.179) для нахождения общих точек вводят секущие плоскости, параллельные одновременно образующим обеих поверхностей.

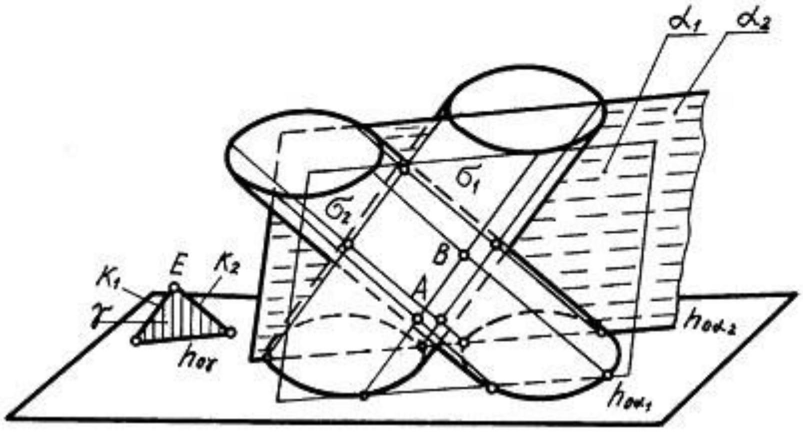


Рис.1.179

Для задания этих плоскостей из произвольной точки E пространства проводят две прямые k_1 и k_2, параллельные образующие цилиндрических поверхностей σ_1 и σ_2. Эти пересекающиеся прямые определяют некоторую плоскость γ. Плоскости α_1, α_2,... параллельные плоскости γ будут пересекать заданные поверхности по образующим.Дальнейшее построение аналогично построениям в предыдущих примерах.

Для нахождения точек пересечения прямой линии с конической или цилиндрической поверхностью прямую удобно заключить в такую вспомогательную плоскость, которая пересечет поверхности по простейшим линиям. Используется то обстоятельство, что любую прямую общего положения всегда можно заключить в плоскость, проходящую через вершину конической поверхности, или в плоскость, параллельную образующей цилиндрической поверхности.

В обоих случаях такая плоскость пересечет заданные поверхности по образующим. На рис.1.180 и рис.1.181 показано решение этой задачи с конической и цилиндрической поверхностью.

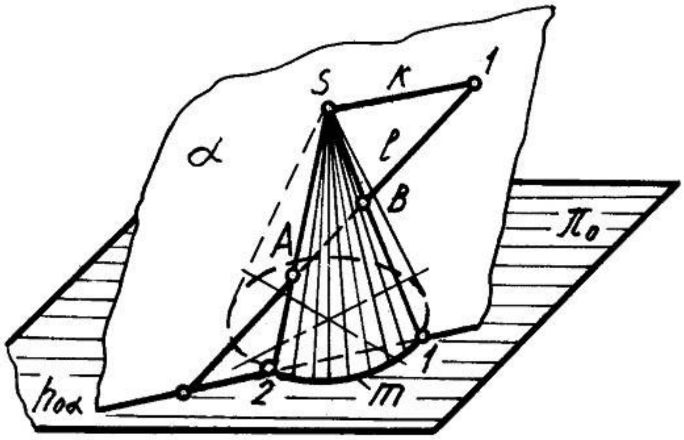


Рис.1.180

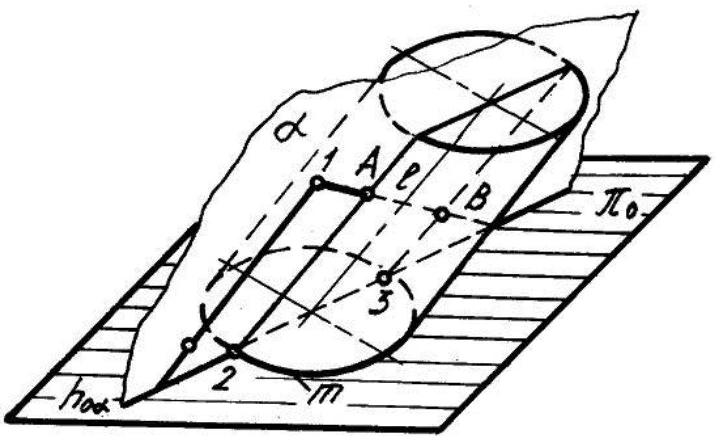


Рис.1.181

На заданной прямой l выбрана произвольная точка 1 и через нее проведена прямая k. На рис.1.180 прямая k проведена через вершину S конуса; на рис.1.181 - параллельно образующей цилиндра.

Дальнейшее решение задач сводится к следующему:

- находят след плоскости $h_{0\alpha}$, заданной прямыми k и l, на плоскости π_0;

- находят точки пересечения этого следа со следами m - поверхностей.

Эти точки являются началом образующих, по которым плоскость α (l∩k) пересекает поверхность конуса или цилиндра.

Точки A, B пересечения образующих с заданной прямой l - искомые. На рис.1.182 и рис.1.183 приведены решения этих задач на чертеже.

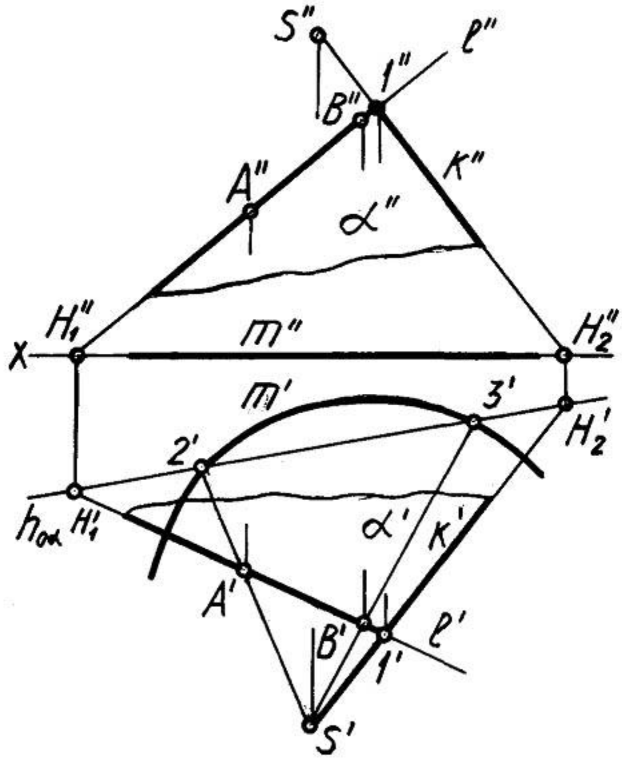


Рис.1.182

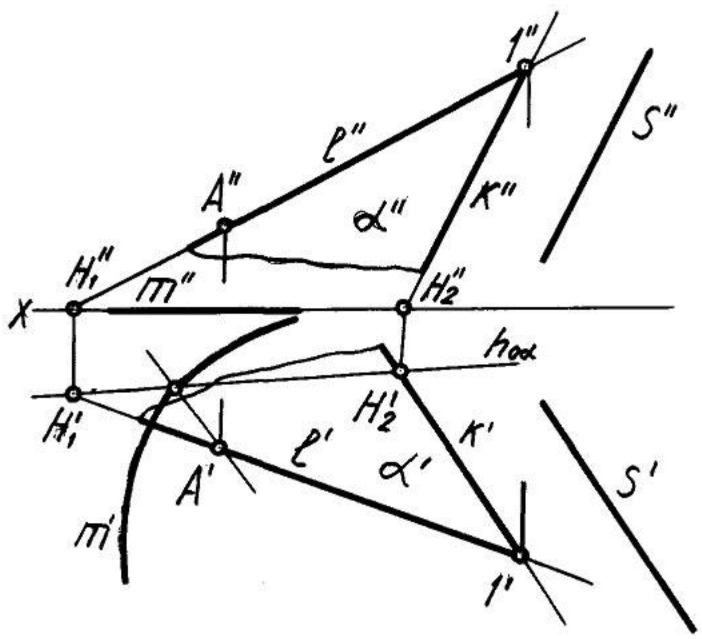


Рис.1.183

На рис.1.182 коническая поверхность, заданная направляющей m и вершиной S, пересекается прямой l. Через точку 1 прямой и вершину S проведена прямая k. Прямые l и k образовали плоскость α, которая пересекает коническую поверхность по образующим. Для нахождения этих образующих построены следы H_1 и H_2 пряных l и k. Соединив точки H'_1 и H'_2, получим горизонтальный след $h_{0\alpha}$ плоскости α, который в пересечении с m' дает точки 2' и 3' - начала искомых образующих. Прямая l пересекается с образующими в точках A и B, которые являются искомыми точками пересечения прямой с конической поверхностью.

На рис.1.183 цилиндрическая поверхность задана направляющей m и направлением s образующей. Прямая k проведена параллельно направлению s. Построение и принятие обозначений аналогичны изложенным ранее.

Рассматривая позиционные задачи с линейчатыми поверхностями с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана), остановимся лишь на задачах по отысканию проекций точки, принадлежащей поверхности.

Пусть задана косая плоскость (рис.1.184) и принадлежащая ей точка A своей горизонтальной проекцией A'.

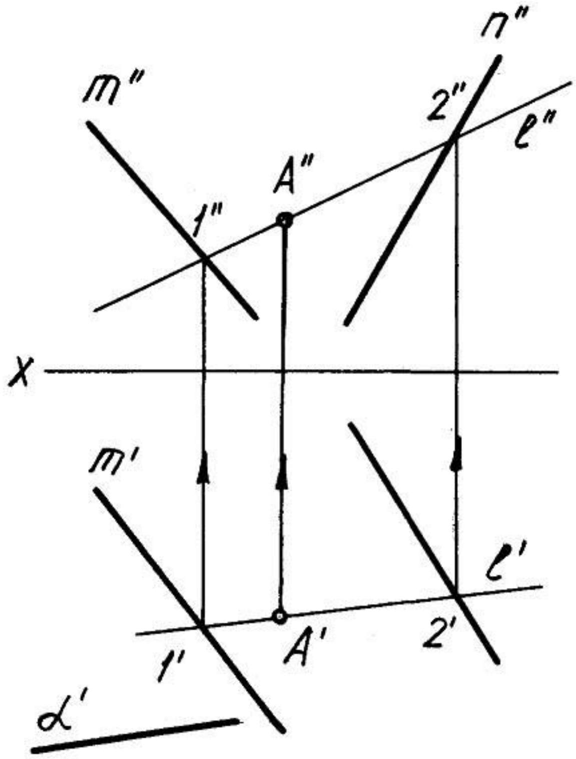


Рис.1.184

Для отыскания проекции A'' проведем через A' образующую параллельно плоскости α. Построим фронтальную проекцию образующей и на ней отметим A''.

Если на той же поверхности задана проекция A'' точки A, (рис.1.185), то задача построения A' может быть решена следующим образом.

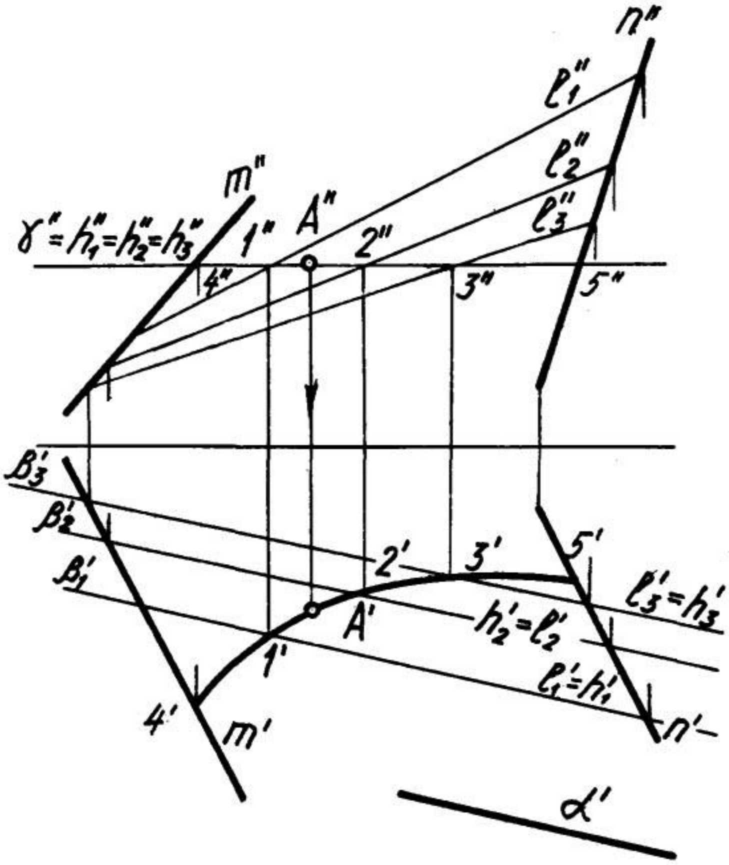


Рис.1.185

Через точку А" проведем плоскость частного положения, например, горизонтальную γ (γ"). Построим участок линии пересечения плоскости γ с заданной поверхностью. Для построения проекций линии пересечения на чертеже проведем ряд вспомогательных плоскостей $\beta_1 \dots \beta_3$ параллельно плоскости параллелизма α. Эти плоскости пересекут поверхность по образующим $l_1 \dots l_3$ и плоскость γ по горизонталям $h_1 \dots h_3$. В пересечении фронтальных проекций образующих и горизонталей отметим точки 1"...3" кривой пересечения.

Пользуясь этими точками, построим горизонтальную проекцию линии пересечения поверхности с плоскостью γ и на ней отметим искомую проекцию А'.

Рассмотренные задачи лежат в основе решения позиционных задач на пересечение поверхностей Каталана плоскостью или прямой линией.

Рассмотрим позиционные задачи на принадлежность точки винтовой поверхности. На рис.1.186 изображена прямая винтовая поверхность и показано построение точки А (по заданной проекции А' построена проекция А") и точки В (по заданной проекции В" построена проекция В').

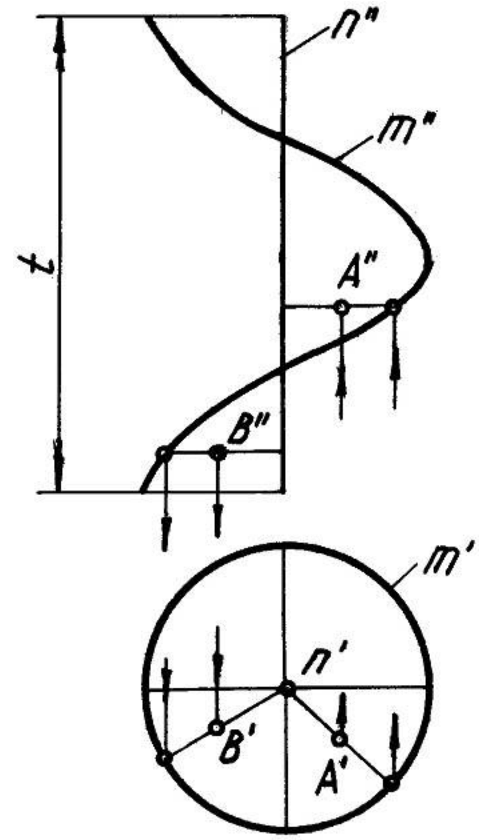


Рис.1.186

При построении использованы образующие поверхности. Напомним, что при сечении прямой винтовой поверхности плоскостью, проходящей через ее ось, а также плоскостью, перпендикулярной оси, получаются образующие поверхности.

Чтобы построить фронтальную проекцию точки А на косой винтовой поверхности (рис.1.187), проводят горизонтальную проекцию О'Е' образующей через А', строят О"Е" (при этом используют то, что проекция образующей на ось - величина постоянная - l) и на ней отмечают А".

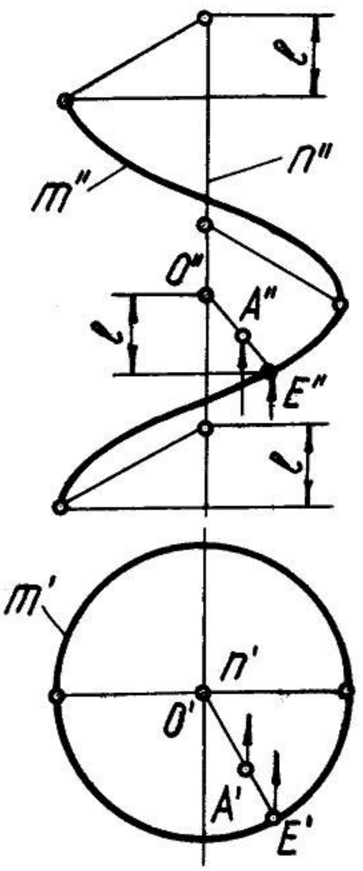


Рис.1.187

Для построения проекции B' точки по заданной проекции B'' (рис.1.188) через B'' проводят плоскость α частного положения и находят участок линии пересечения ее с винтовой поверхностью.

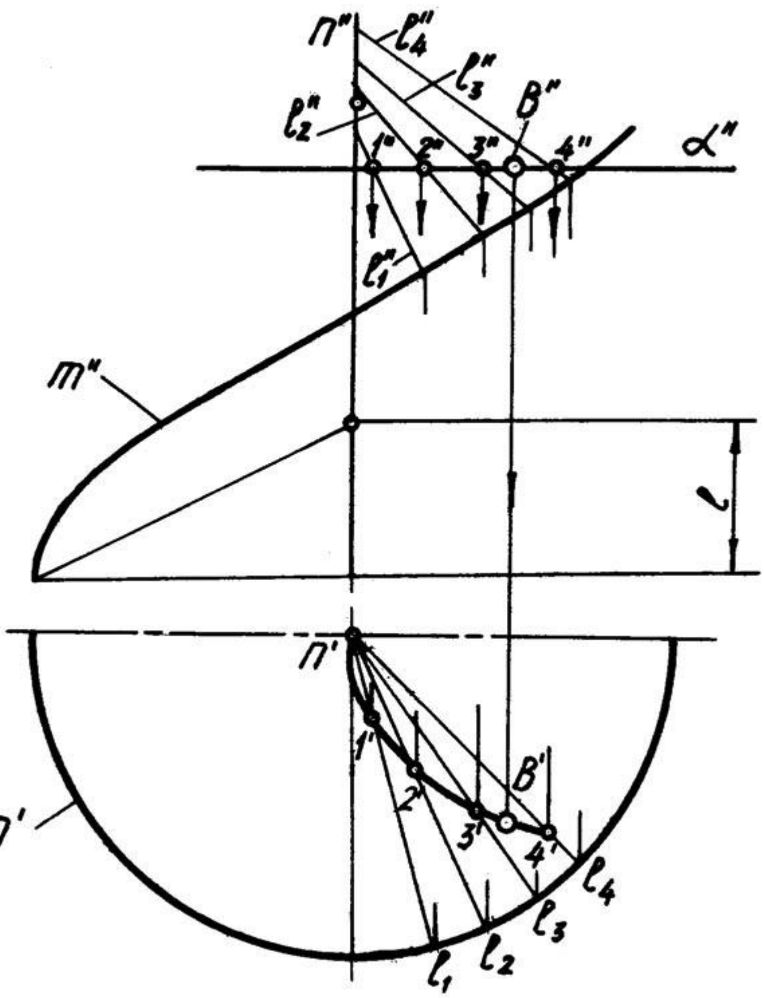


Рис.1.188

Для этого проводят ряд горизонтальных проекций образующих $l_1 \ldots l_4$ и строят соответствующие им фронтальные проекции. Далее отмечают точки 1'', 2'', 3'', 4'' пересечения фронтальных проекций с плоскостью. Эти точки принадлежат фронтальной проекции линии пересечения. На горизонтальных проекциях образующих находят проекции 1', 2', 3', 4', соединив которые, получим горизонтальную проекцию искомой линии. На проекции линии отмечаем искомую проекцию точки - B'.

§28. Позиционные задачи с преобразованием чертежа

В ряде случаев решение позиционных задач можно упростить путем приведения одной из геометрических фигур к частному положению. Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти точку пересечения плоскости α и отрезка AB (рис.1.189).

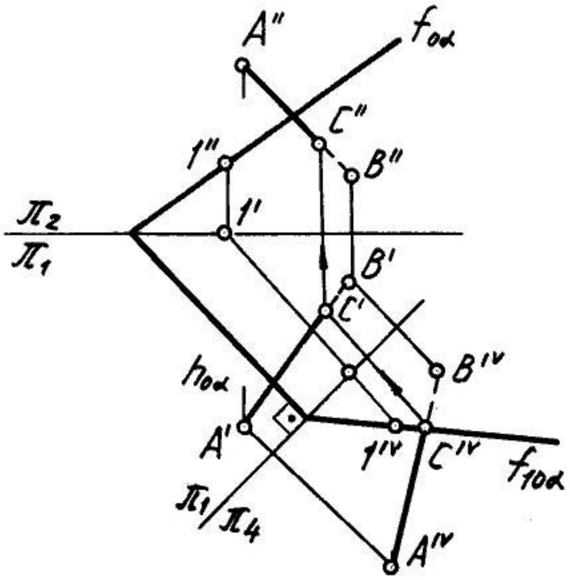


Рис.1.189

Задача легко решается, если плоскость занимает проецирующее положение. Введем новую плоскость, например π_4, чтобы $\alpha \perp \pi_4$. Построим новую проекцию плоскости α и отрезка AB. Отметим проекции C^{IV} точки пересечения α и AB. Найдем проекции C' и C''.

2. Найти точки пересечения прямой общего положения AB со сферической поверхностью (рис.1.190).

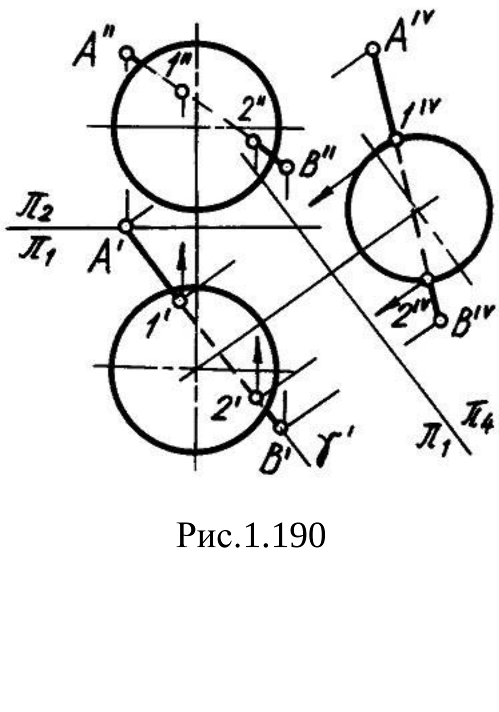


Рис.1.190

Из рисунков рис.1.130 и рис.1.131 видно, что отыскание точек пересечения прямой со сферой не составляет труда, когда прямая занимает частное положение. Преобразуем заданную систему так, чтобы прямая AB заняла положение, параллельное новой плоскости π_4. В системе π_4, π_1 заключим прямую во фронтальную плоскость γ, построим окружность сечения сферы плоскостью и отметим искомые точки 1^{IV}, 2^{IV}. Найдем проекции точек на плоскостях π_2, π_1. Отметим видимость участков прямой AB.

3. Построить проекции линии пересечения цилиндрической поверхности σ плоскостью треугольника α (рис.1.191).

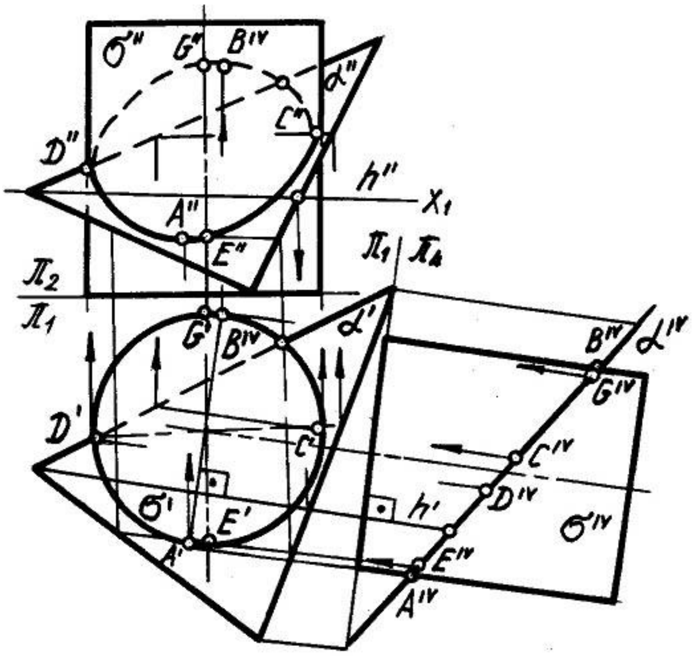


Рис.1.191

Преобразуем чертеж так, чтобы в новой системе плоскость α стала проецирующей. Применим третью задачу преобразования чертежа. Для этого необходимо провести новую ось $\pi_4/\pi_1 \perp h'$ (горизонтальной проекции горизонтали).

Находим фронтальные проекции σ^{IV} и α^{IV} в новой системе. В системе π_4, π_1 плоскость α - фронтально-проецирующая. Угол наклона этой плоскости к оси цилиндрической поверхности не равен 90°, в сечении получится эллипс. Горизонтальная проекция эллипса совпадает с окружностью основания, фронтальная проекция - с α^{IV}.

Определим низшую точку A, высшую B, точки C и D, отделяющие видимую часть от невидимой, наиболее и наименее удаленные точки от плоскости π_2 - E и G. Построение видно из чертежа.

4. Построить проекцию линии пересечения конической поверхности σ плоскостью α (рис.1.192).

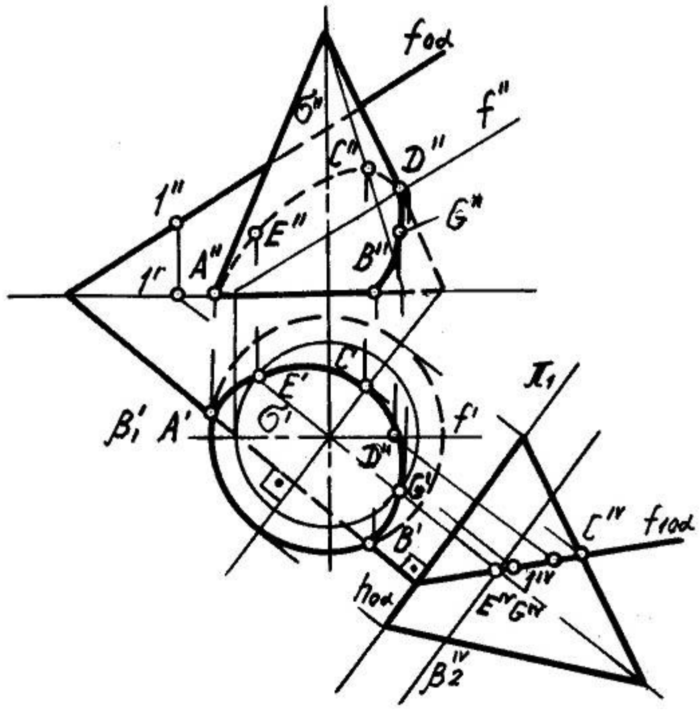


Рис.1.192

Преобразуем чертеж так, чтобы в новой системе плоскость α оказалась проецирующей. Для этого ось π_4/π_1 проводим перпендикулярно $h_{0\alpha}$.

В системе π_4, π_1 угол между секущей плоскостью и осью конуса больше угла наклона образующей конической поверхности к оси. В сечении получается эллипс, прячем неполный, так как плоскость α пересекает основание. Точки пересечения плоскости α с окружностью основания - A и B.

Для определения точек, являющихся границей видимой и невидимой частей линии пересечения, проведена вспомогательная плоскость β_1. С поверхностью конуса она пересечется по очерковым образующим, а с плоскостью α - по фронтали f (f', f''). На их пересечении отмечаем точку D (D', D'').

В системе π_4, π_1 проекция эллипса совпадает со следом f_{10a}, построение высшей точки C (C', C") видно из чертежа. Для определения промежуточных точек E, G в системе π_4, π_1 проведена вспомогательная плоскость β_2, построение этих точек в системе π_2, π_1 также видно из чертежа.

5. Достроить сечение наклонной призмы плоскостью треугольника (рис.1.193).

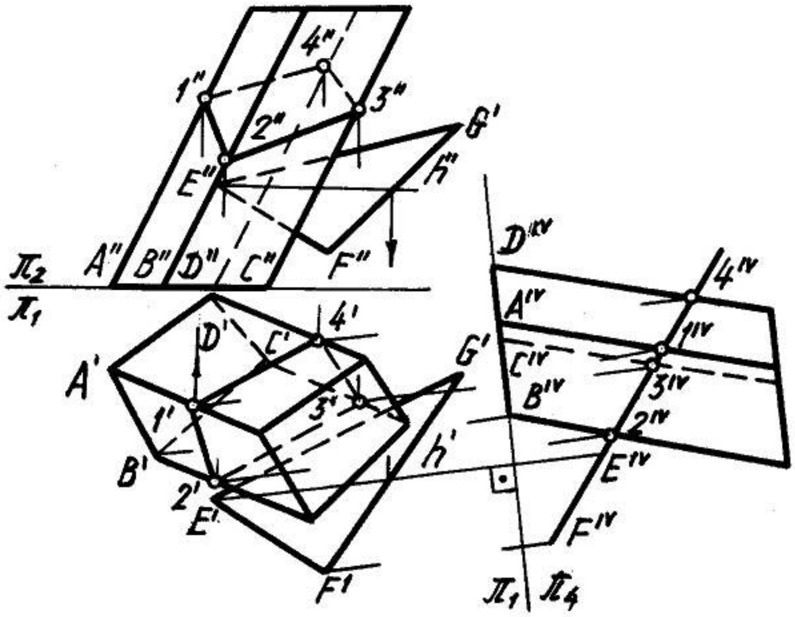


Рис.1.193

Способом замены плоскостей проекций плоскость треугольника приведена в положение фронтально-проецирующей в системе π_4, π_1. Фронтальная проекция сечения 1^{IV}-2^{IV}-3^{IV}-4^{IV} проецируется в прямую линию, совпадающую с фронтальной проекцией плоскости треугольника. Построение горизонтальной проекции фигуры сечения 1'-2'-3'-4' и фронтальной проекции 1"-2"-3"-4" в системе π_2, π_1 видно из рис.1.193.

6. Построить проекции линии пересечения конуса и цилиндра (рис.1.194).

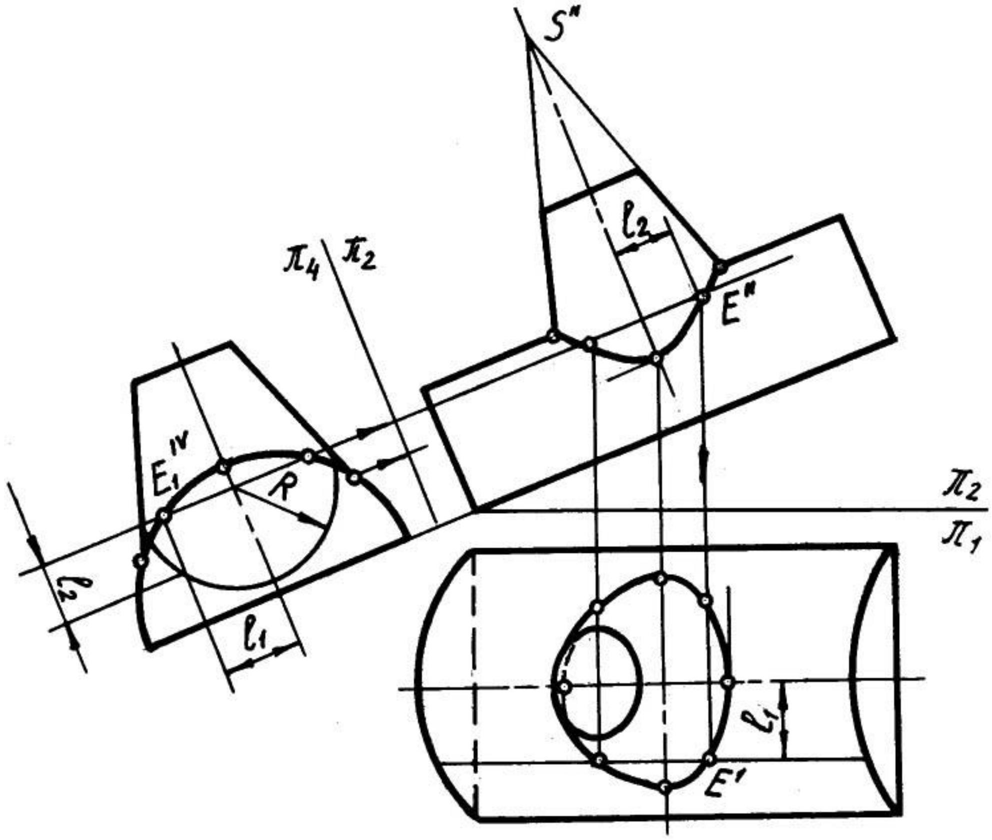


Рис.1.194

Для решения этой задачи введена новая горизонтальная плоскость π_4, перпендикулярная оси цилиндрической поверхности. Искомая линия пересечения проецируется на плоскость π_4 в виде дуги полуокружности - проекции цилиндра. Задаваясь точками на дуге, можно получить их фронтальные проекции. Например, взяв точку E^{IV}, определяем отрезок l_2 на полуокружности радиуса R, представляющей половину параллели на конусе. Откладывая отрезок l_2 на фронтальной проекции (см. рис.1.194), получим на линии связи с E^{IV} проекцию E". После этого можно построить горизонтальную проекцию кривой при помощи образующих цилиндра. Так, образующая, на которой находится точка E', определяется отрезком l_1.

§29. Некоторые особые случаи взаимного пересечения поверхностей

Рассмотрим некоторые случаи пересечения поверхностей.

При пересечении между собой поверхностей второго порядка линиями пересечения в общем случае являются пространственные кривые линии. В некоторых случаях линиями их пересечения могут быть кривые второго порядка, т.е. линии пересечения распадаются на плоские кривые. В частности, это относится к поверхностям, удовлетворяющим теореме Монжа, которую можно сформулировать следующим образом: две поверхности второго порядка, вписанные или описанные около третьей поверхности также второго порядка, пересекаются по двум плоским кривым.

Пример 1. На рис.1.195 изображены два цилиндра вращения одинакового диаметра с пересекающимися осями.

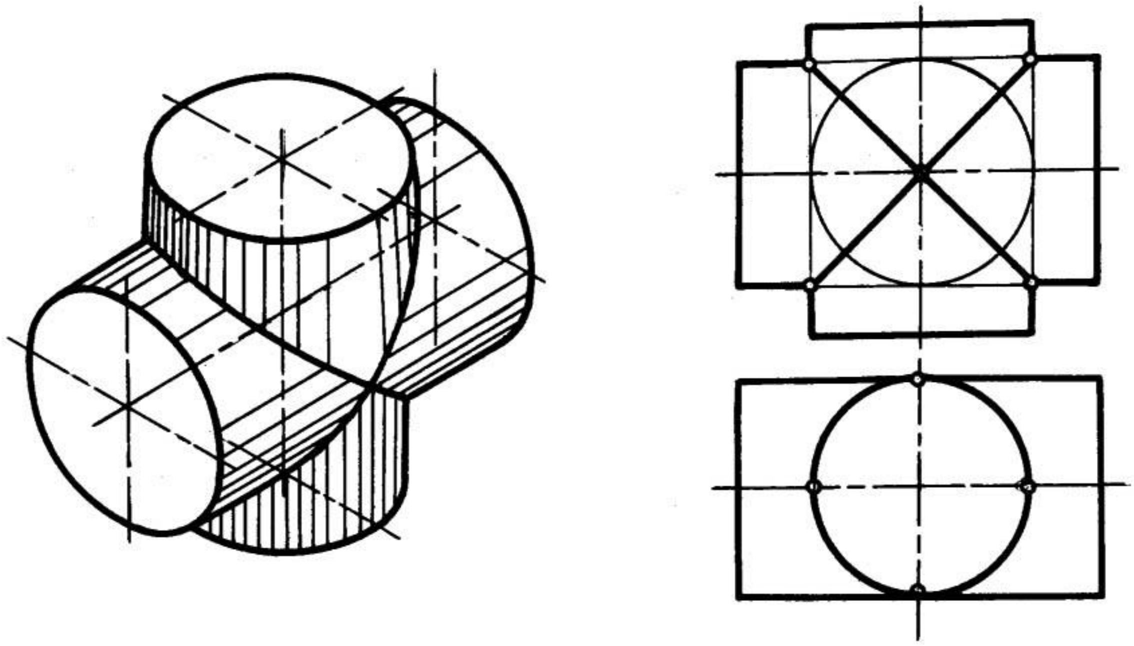


Рис.1.195

В эти цилиндры можно вписать сферу. Поэтому, согласно приведенной теореме, их поверхности пересекаются по двум плоским кривым, в данном случае по эллипсам. При указанном расположении общей плоскости симметрии цилиндров, фронтальные проекции эллипсов изображаются прямолинейными отрезками, а горизонтальные совпадают с очерком горизонтальной проекции вертикального цилиндра, т.е. с окружностью.

Некоторые другие примеры, иллюстрирующие теорему Монжа, приведены на рис.1.196.

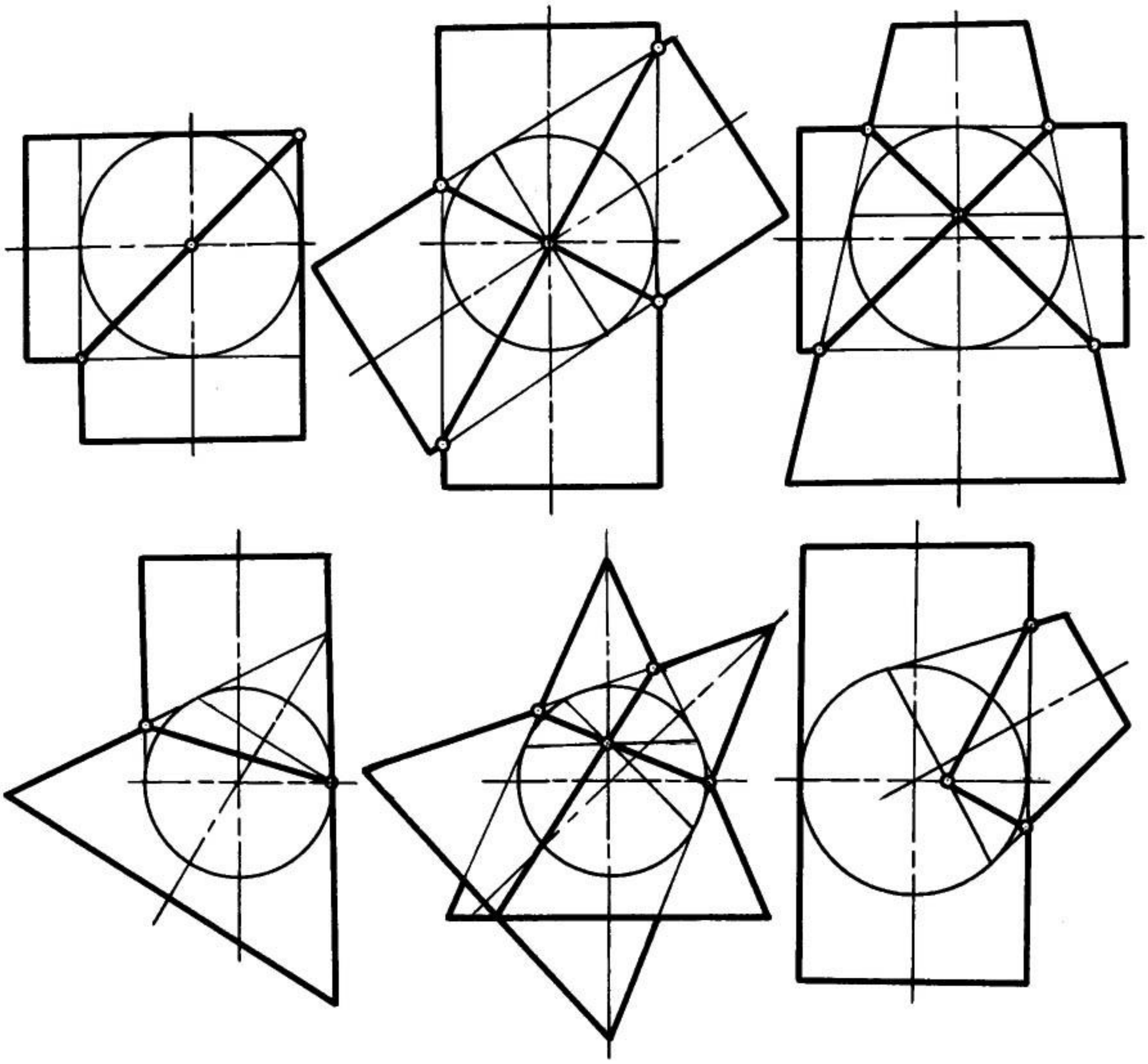


Рис.1.196

Кроме того, отметим некоторые другие случаи пересечения поверхностей вращения (рис.1.197, рис.1.198, рис.1.199).

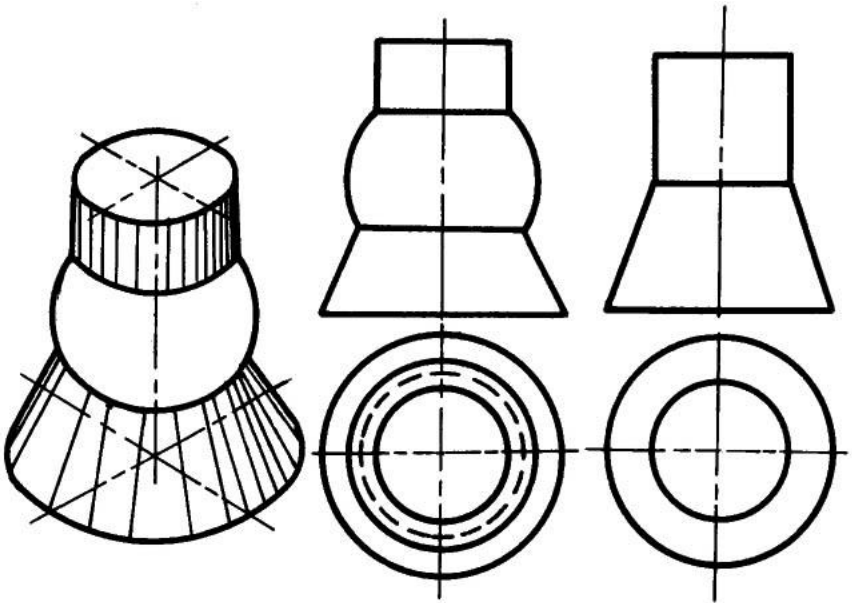


Рис.1.197

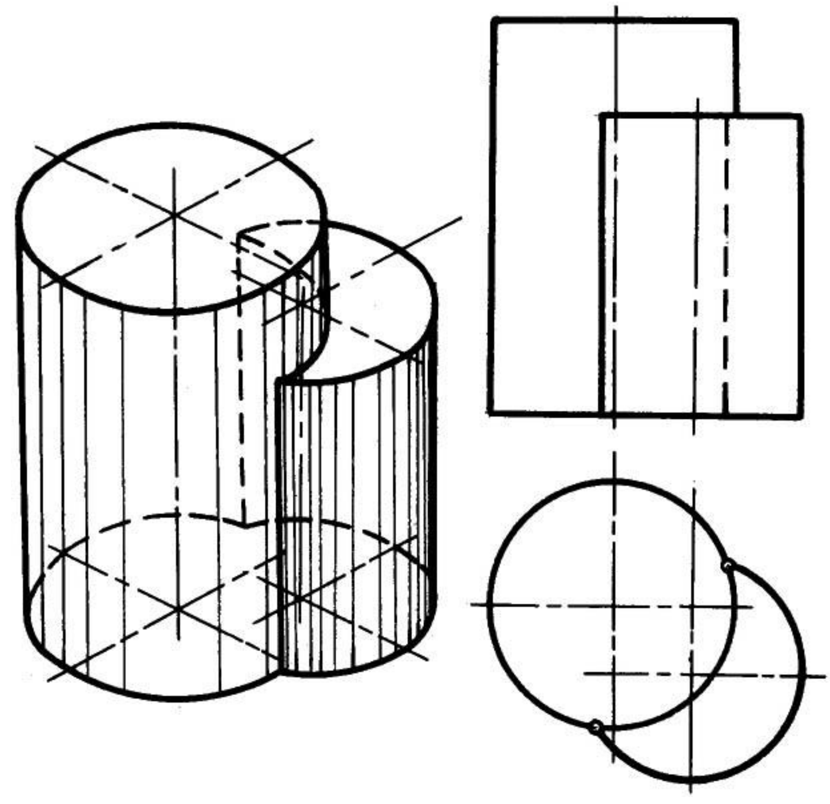


Рис.1.198

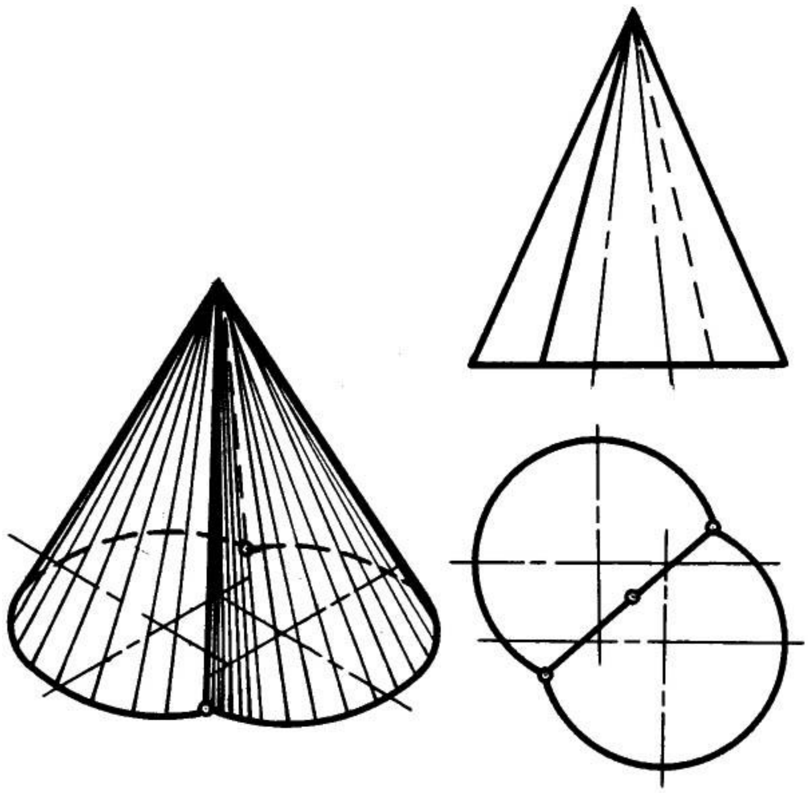


Рис.1.199

ГЛАВА XI. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§30. Понятие о метрических задачах

Метрическими называются задачи, целью решения которых является определение различных величие геометрических элементов.

Проекции измеряемого элемента могут быть либо заданы на чертеже по условию задачи, либо получены при помощи дополнительных геометрических построений.

Заданный или построенный геометрический элемент чаще занимает в пространстве общее положение по отношению к принятым плоскостям проекций и, следовательно, проецируется на эти плоскости о искажением линейных и угловых размеров. Для определения действительной величины элемента, его приводят путем преобразования чертежа в положение, удобное для измерения (частное по отношению к плоскостям проекций). В большинстве случаев это достигается посредством решения одной из четырех основных задач преобразование чертежа (см. §23).

Алгоритм решения метрической задачи в общем случае следующий:

- построить проекции измеряемого геометрического элемента (в ряде случаев проекции измеряемого элемента задаются в условии задач);

- привести проекции измеряемого элемента в положение, удобное для измерений;

- произвести измерения.

Метрические задачи можно объединить в три основные группы:

1. Определение расстояний:

- от точки до другой точки, прямой, плоскости;

- от прямой до другой прямой, плоскости;

- от плоскости до другой плоскости.

2. Определение углов:

- между пересекающимися и скрещивающимися прямыми;

- между прямой и плоскостью;

- между пересекающимися плоскостями.

3. Определение величины и формы части поверхности:

- плоской;

-кривой или гранной, совмещенной о плоскостью (построение разверток).

§31. Определение расстояний

При определении расстояния между двумя точками или действительной величины отрезка не требуется выполнение первой части алгоритма решения задачи, так как проекции измеряемого объекта имеются на чертеже. Вторую часть алгоритма можно выполнить двумя способами:

- применяя решение первой задачи преобразования чертежа (§23);

- применяя свойства ортогональных проекций (§5).

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Определить расстояние между точками A и B (рис.1.200, рис.1.201, рис.1.202).

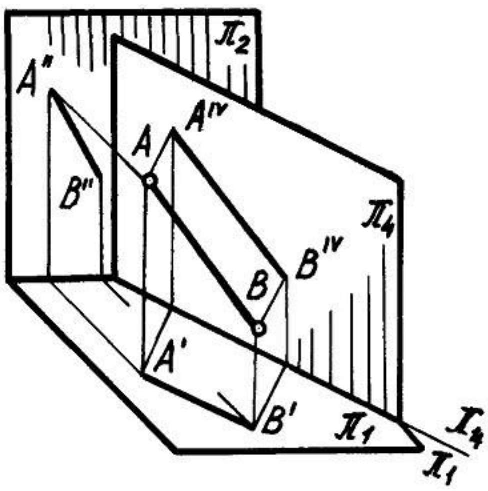


Рис.1.200

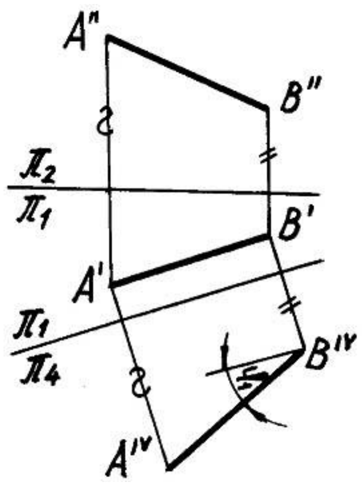


Рис.1.201

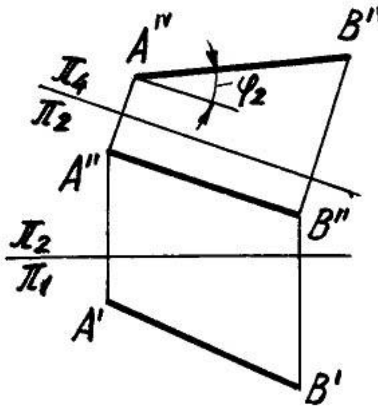


Рис.1.202

Используем способ перемены плоскостей проекций.

На рис.1.200, рис.1.201 плоскость проекций π_2 заменена новой плоскостью $\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \| AB$, т.е. от системы π_2, π_1 перешли к новой системе π_4, π_1, $\pi_1 \| A'B'$. Так как в новой системе плоскостей проекций отрезок AB параллелен плоскости проекций π_4, то он проецируется на нее без искажения.

Этот пример решен также путем замены горизонтальной плоскости проекций π_1 новой плоскостью π_4 (рис.1.202).

Напомним, что при решении примеров (см. рис.1.201, рис.1.202) одновременно найдены углы φ_1 и φ_2 наклона прямой AB к плоскостям π_1, и π_2.

Пример 2. Определить действительную величину отрезка AB (см. рис.1.203).

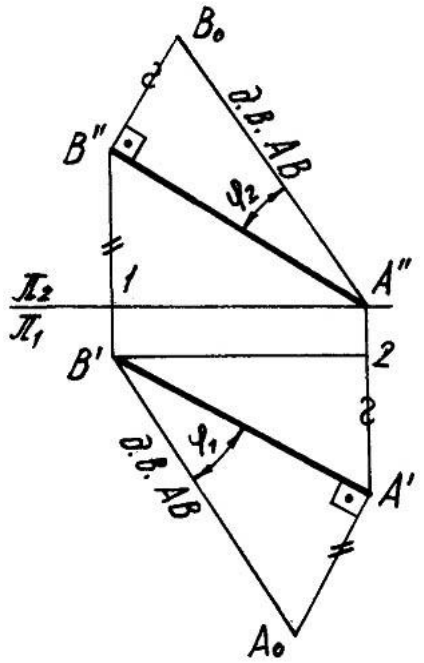


Рис.1.203

Используем свойство 5 ортогонального проецирования.

На рис.1.203 построен прямоугольный треугольник A_0A'B', где один катет равен горизонтальной проекции отрезка A'B', а другой катет - разности расстояний концов отрезка A"B" от горизонтальной плоскости проекций (1B"). Гипотенуза A_0B' треугольника A_0A'B' равна отрезку AB.

Аналогично прямоугольный треугольник построен на фронтальной проекции A"B" отрезка AB (рис.1.203). В этом случае [A"B_0]=[A_0B']=AB.

Во всех случаях в заключение выполняется третья часть алгоритма - производится измерение на чертеже отрезка, равного отрезку AB. Расстояние от точки до прямой измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Задача может быть решена как построением проекций перпендикуляра (т.е. с выполнением первой части алгоритма), так и без построения проекций перпендикуляра. Рассмотрим решение задач на отдельных примерах.

Пример 1. Определить расстояние от точки A до прямой BC (рис.1.204).

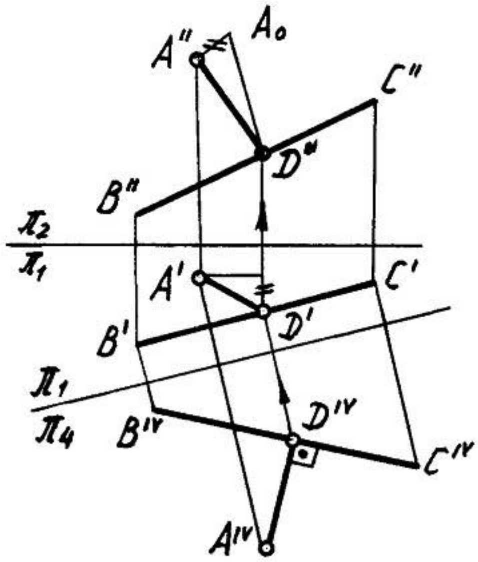


Рис.1.204

Преобразуем чертеж так, чтобы прямая BC в новой системе стала параллельной плоскости проекций. В новой системе, используя свойство 6 ортогонального проецирования, строим перпендикуляр из точки A на заданную прямую. Одним из способов находим действительную величину отрезка AD - перпендикуляра.

Пример 2. Определить расстояние от точки A до прямой l (рис.1.205, рис.1.206).

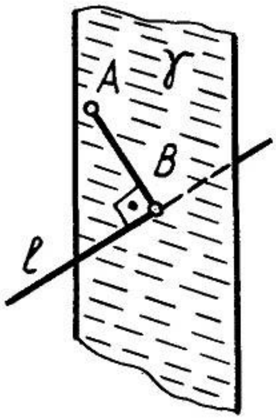


Рис.1.205

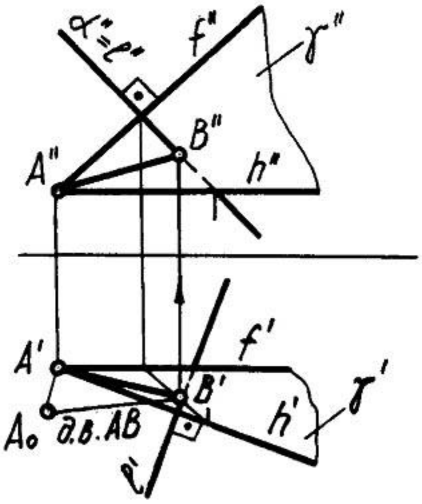


Рис.1.206

Чтобы найти основание перпендикуляра, опущенного из точки А на прямую l, проведем через точку А плоскость, перпендикулярную l (см. рис.1.205). Точка пересечения этой плоскости с прямой l и будет основанием перпендикуляра. На чертеже (см. рис.1.206) эта плоскость задана горизонталью h и фронталью f. Так как γ⊥l, то h'⊥l'. Построение точки пересечения В (В', В'') плоскости γ с прямой l видно из чертежа. Имея проекцию перпендикуляра АВ, одним из способов находим его действительную величину и производим измерения.

Рассмотрим пример решения задачи без выполнения первой части алгоритма - построения проекций перпендикуляра.

Пример 3. Определить расстояние от точки А до прямой ВС (рис.1.207).

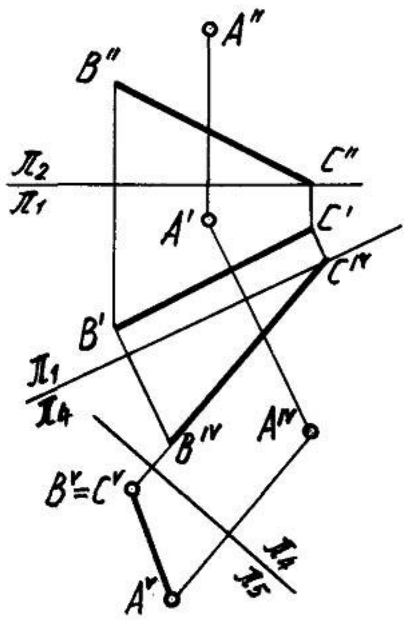


Рис.1.207

Преобразуем чертеж так, чтобы в новой системе π_4, π_5 прямая BC стала перпендикулярной плоскости π_5, т.е. применим решение второй задачи преобразования чертежа. Расстояние между проекциями A^V и B^V=C^V является искомым расстоянием.

Расстояние от точки до плоскости измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Задача может быть решена как с построением проекций перпендикуляра (т.е. с выполнением первой части алгоритма), так и без построения проекций перпендикуляра.

Рассмотрим решение задачи на примерах.

Пример 1. Определить расстояние от точки А до плоскости σ (σ', σ''), заданной треугольником (рис.1.208):

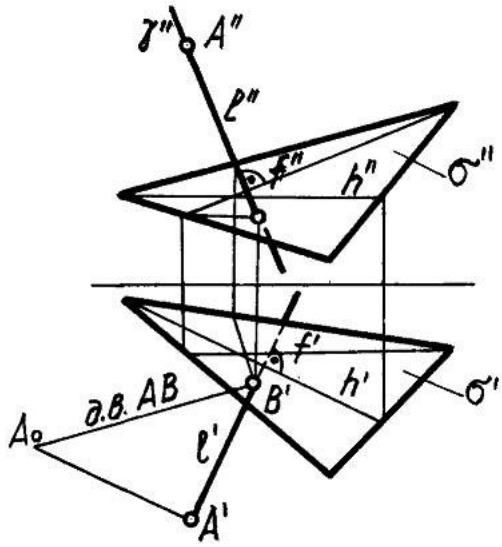


Рис.1.208

- из точки А проводим пряную l, перпендикулярную плоскости σ. Так как $l \perp \sigma$, то $l'' \perp f''$ и $1' \perp h'$;

- находим точку $B = l \cap \sigma$;

- одним из известных способов определяем действительную величину перпендикуляра АВ. Это и есть искомое расстояние.

Пример 2. Определить расстояние от точки А до плоскости α заданной следами (рис.1.209).

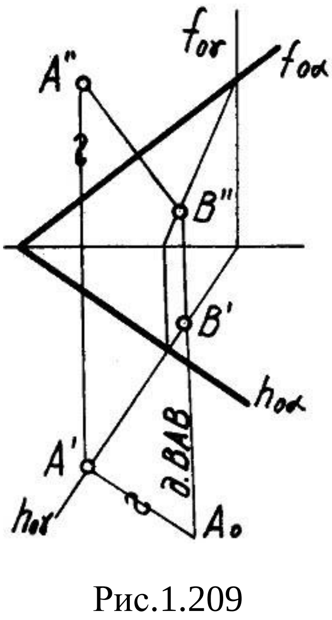


Рис.1.209

Решение аналогично решению предыдущей задачи.

Рассмотрим пример решения задачи без выполнения первой части алгоритма - построения проекций перпендикуляра.

Пример 3. Определить расстояние от точки А до плоскости β, заданной треугольником (рис.1.210, рис.1.211), заданной следами (рис.1.212).

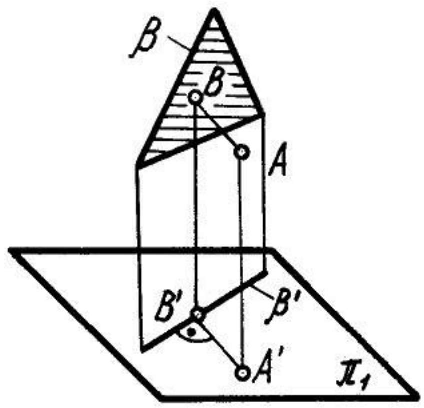


Рис.1.210

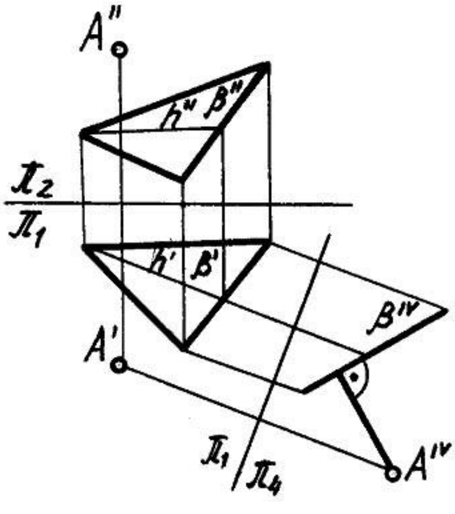


Рис.1.211

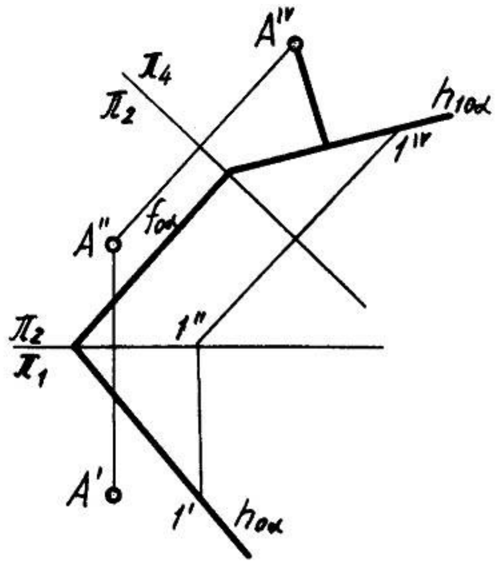


Рис.1.212

Преобразуем чертеж так, чтобы в новой системе плоскость π_4 стала перпендикулярной плоскости π_1 (π_2) (т.е. применим решение третьей задачи преобразования чертежа). Расстояние от проекции A^{IV} точки до проекции плоскости в новой системе является искомым расстоянием.

Расстояние между параллельными прямыми измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую (рис.1.213).

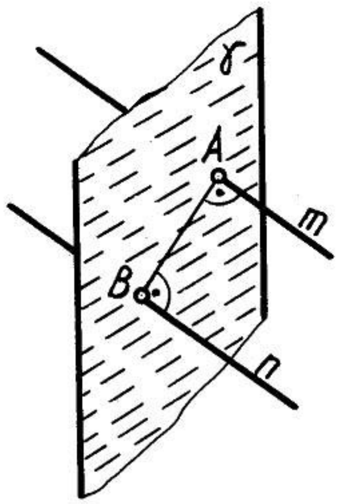


Рис.1.213

Таким образом, задача сводится к задаче на определение расстояния от точки до прямой (см. рис.1.204, рис.1.206, рис.1.207).

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется отрезком [AB], перпендикулярным одновременно к двум прямым m и n (рис.1.214).

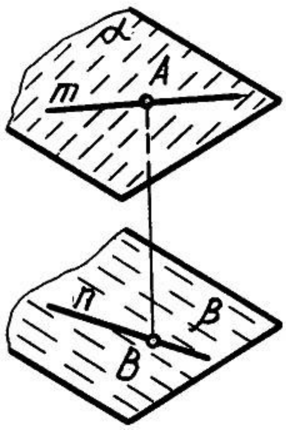


Рис.1.214

Пример 4. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

Очевидно, если одну из прямых, например AB, расположить перпендикулярно какой-либо плоскости, то отрезок перпендикуляра проецируется без искажения на эту плоскость и будет равен искомому расстоянию (рис.1.215).

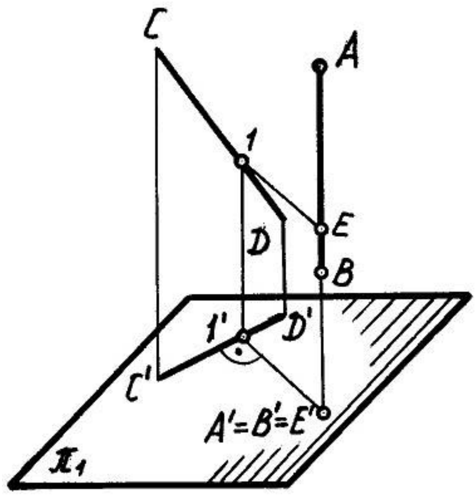


Рис.1.215

На чертеже (рис.1.216) прямые АВ и CD занимают произвольное положение.

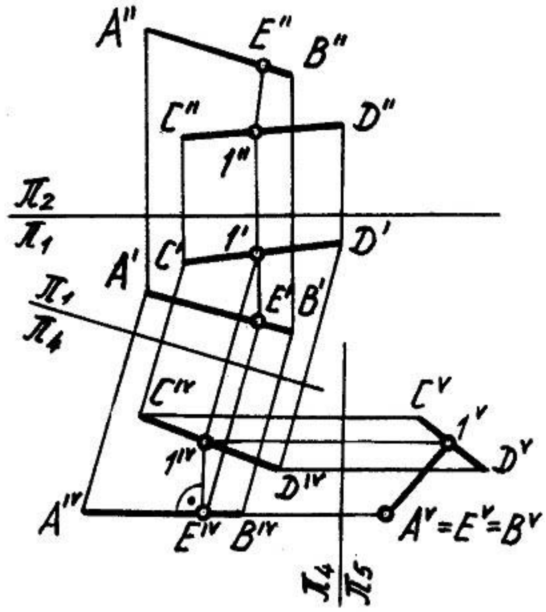


Рис.1.216

Преобразуем чертеж так, чтобы в новой системе π_4, π_5 прямая АВ стала перпендикулярной π_5 (т.е. применим решение второй задачи преобразования чертежа). Тогда расстояние между проекциями E^V и $C^V D^V$ будет равно длине искомого перпендикуляра.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на плоскость, т.е. задача сводится к задаче на определение расстояния от точки до плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из любой точки одной плоскости на другую плоскость, т.е. задача сводится к задаче на определение расстояния от точки до плоскости и может быть решена как с построением перпендикуляра (с выполнением первой части алгоритма) (рис.1.208, рис.1.209), так и без построения проекций перпендикуляра, с использованием третьей задачи преобразования чертежа.

§32. Определение углов

Угол проецируется без искажения, если его плоскость параллельна плоскости проекций. Таким образом, при выполнении второй части алгоритма решения метрической задачи измерения угла плоскость угла приводится в положение, параллельное плоскости проекций, т.е. применяется четвертая задача преобразования чертежа.

Определение угла между пересекающимися прямыми не требует выполнения первой части алгоритма, так как проекции угла обычно заданы. Пример решения задачи показан на рис.1.217.

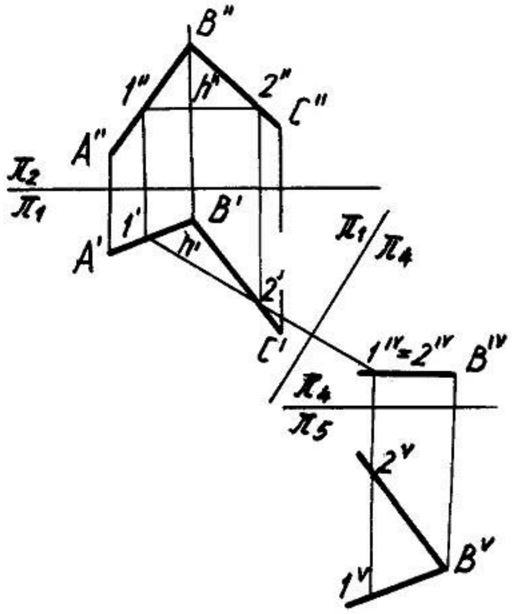


Рис.1.217

Плоскость ABC приведена в положение, параллельное плоскости π_5. В этом случае углы $1^V B^V 2^V$=ABC. Угол между двумя скрещивающимися прямыми определяется углом между пересекающимися прямыми, параллельными заданным скрещивающимся прямым, т.е. для решения задачи необходимо выполнить первую часть алгоритма - из произвольной точки 1 (1', 1") провести прямые k и l, параллельные заданным скрещивающимся прямым m и n (рис.1.218).

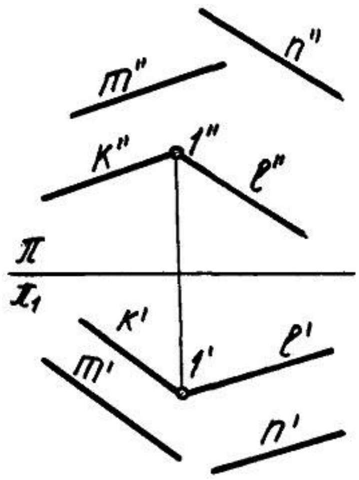


Рис.1.218

Дальнейшее решение задачи сводится к предыдущему случаю.

Угол между прямой и плоскостью измеряется острым углом φ, заключенным между прямой и ее проекцией на эту плоскость (рис.1.219).

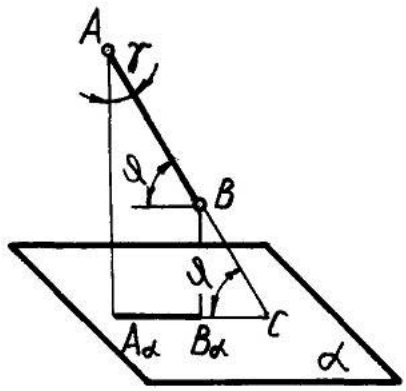


Рис.1.219

Решение задачи по определению угла φ на чертеже является достаточно сложным. В связи с этим задачу сводят к более простой - к определению угла φ, заключенного между прямой и перпендикуляром к плоскости и дополняющего угол φ до 90°, после чего вычисляют угол φ. Таким образом, порядок решения задачи следующий:

- из любой точки заданной прямой проводят перпендикуляр к плоскости;

- используя четвертую задачу преобразования чертежа, приводят плоскость угла γ в положение, параллельное плоскости проекций;

- измеряют угол γ и вычисляют искомый угол φ=90°-γ.

Примеры выполнения первой части алгоритма решения этой задачи показаны на рис.1.220 для случая прямой АВ и плоскости α, заданной треугольником, и на рис.1.221 для случая прямой АВ и плоскости α , заданной следами.

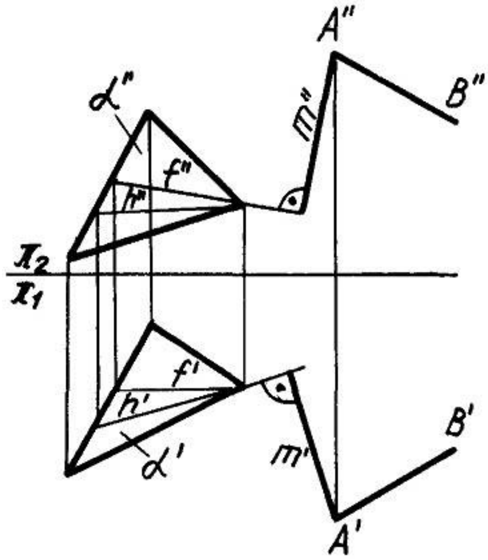


Рис.1.220

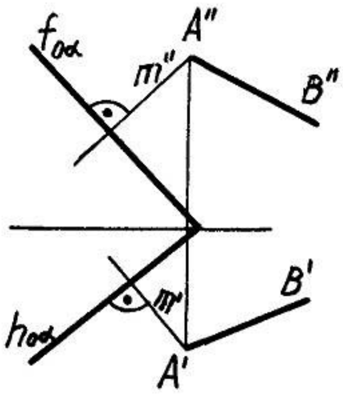


Рис.1.221

Угол между прямой и плоскостью проекций измеряется углом между прямой и ее проекцией на данную плоскость (рис.1.222).

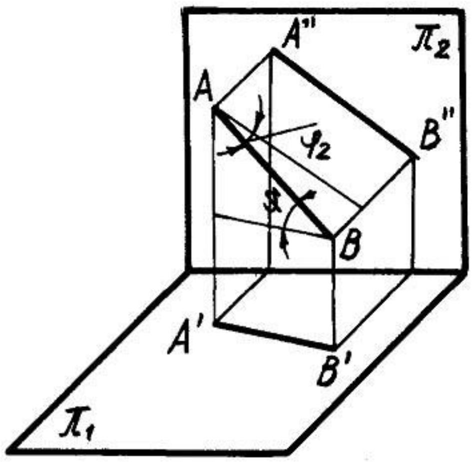


Рис.1.222

Пример определения углов наклона прямой к плоскостям проекций показан на рис.1.201, рис.1.202 с применением способа перемены плоскостей проекций и на рис.1.203 с применением свойства ортогонального проецирования. Этот способ подробнее был рассмотрен ранее.

Угол между двумя плоскостями измеряется линейным углом φ, образованным двумя прямыми - сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру (рис.1.223).

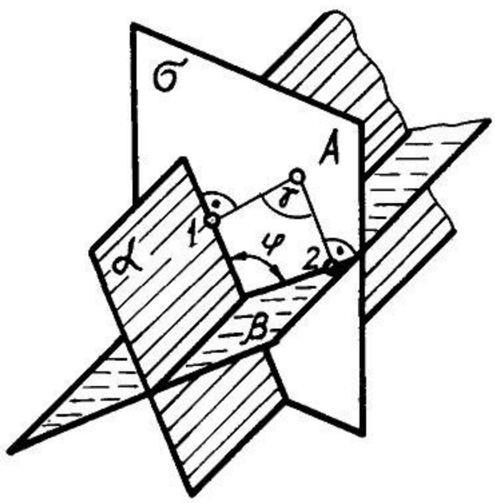


Рис.1.223

Решение задачи на определение угла φ на чертеже является сложным. Поэтому задачу сводят к более простой - определению угла γ , заключенного между перпендикулярами, проведенными к заданным плоскостям из любой точки и дополняющим искомый угол φ до 180°.

Таким образом, порядок решения задачи следующий:

- из произвольной точки пространства проводят прямые, перпендикулярные к заданным плоскостям;

- используя четвертую задачу преобразования чертежа, приводят плоскость этих прямых в положение, параллельное плоскости проекций;

- измеряют угол γ, заключенный между этими прямыми, и вычисляют угол φ=180°-γ.

Окончательно за меру угла между плоскостями принимают меньший из двух найденных углов, т.е. острый угол.

Примеры решения задачи показаны на рис.1.224 для случая плоскостей, заданных не следами, и на рис.1.225 для случаев плоскостей, заданных следами.

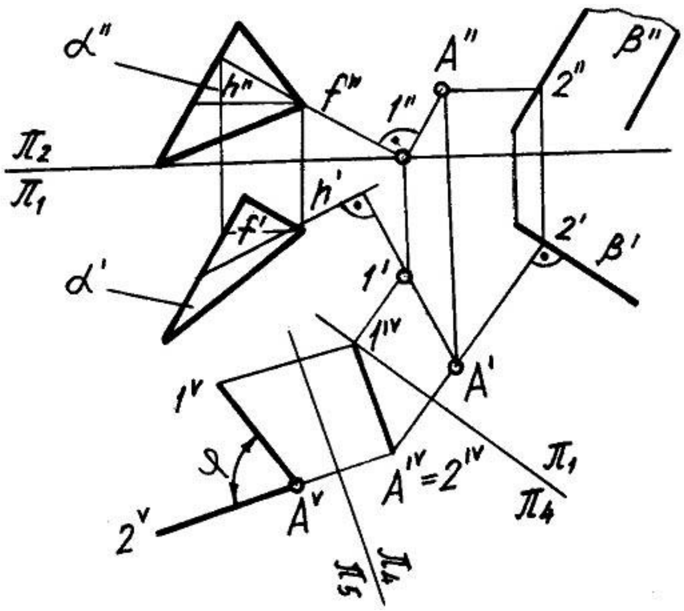


Рис.1.224

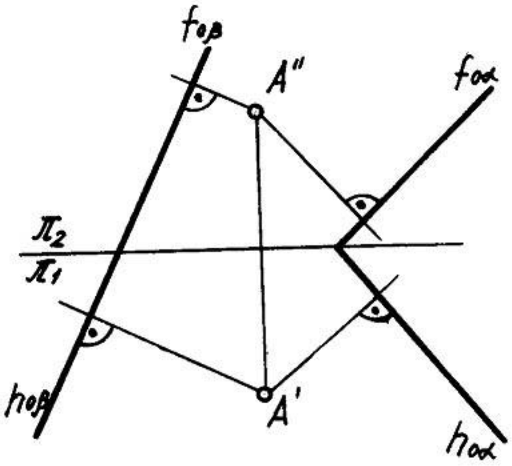


Рис.1.225

В последнем случае пример содержит только первую часть решения задачи.

На рис.1.226 и рис.1.227 показано возможное решение задачи в том случае, когда на чертеже задана линия пересечения плоскостей (ребро двугранного угла).

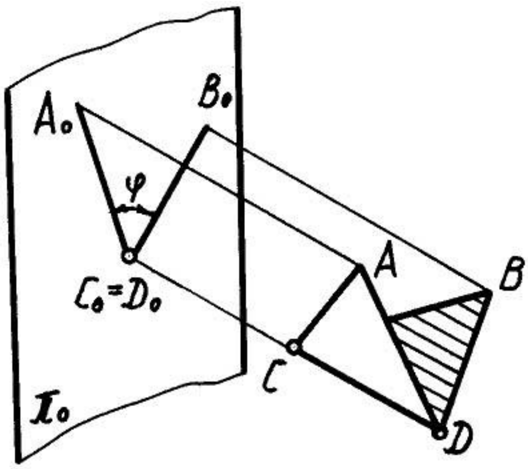


Рис.1.226

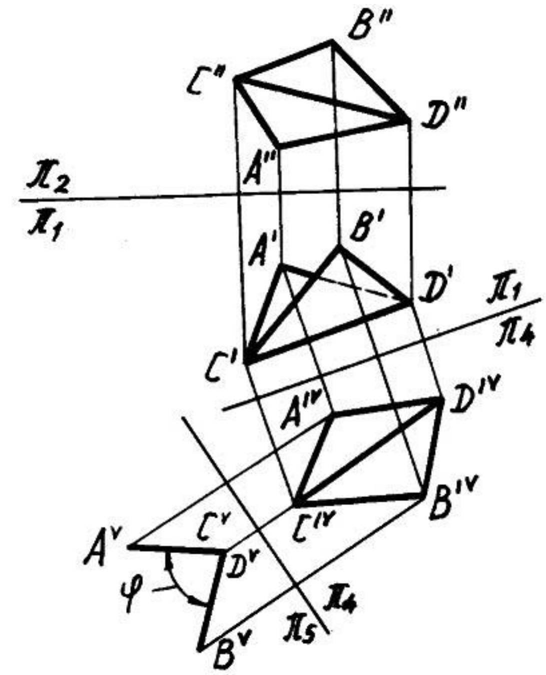


Рис.1.227

Как видно из рис.1.227, достаточно преобразовать чертеж так, чтобы ребро заняло в новой системе положение, перпендикулярное к плоскости проекций. На этой плоскости проекций может быть измерен искомый угол φ.

Определение угла наклона плоскости σ к плоскостям проекций π_2, π_1 основано на том, что угол наклона φ_2 плоскости σ к π_1, проецируется без искажения на плоскость π_2, при $\sigma\perp\pi_2$ (рис.1.228) и φ_1 проецируется без искажения на плоскость π_1, при $\sigma\perp\pi_1$ (рис.1.229).

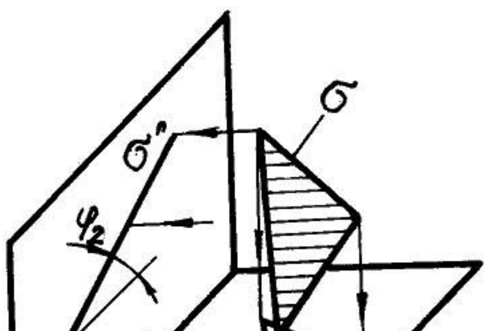


Рис.1.228

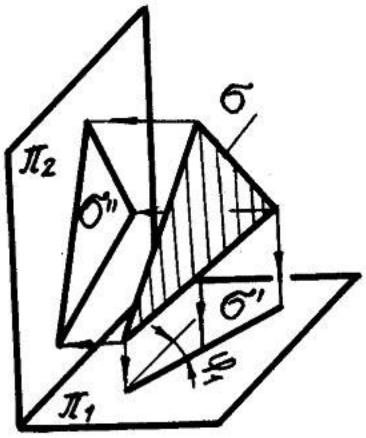


Рис.1.229

Таким образом, для определения углов наклона плоскости общего положения к плоскостям проекций, применяя третью задачу преобразования чертежа, приводят последовательно заданную плоскость σ в положение $\sigma \perp \pi_1$, или $\sigma \perp \pi_2$ и измеряют углы φ_1 и φ_2.

Примеры решения указанной задачи приведены на рис.1.230 и рис.1.231.

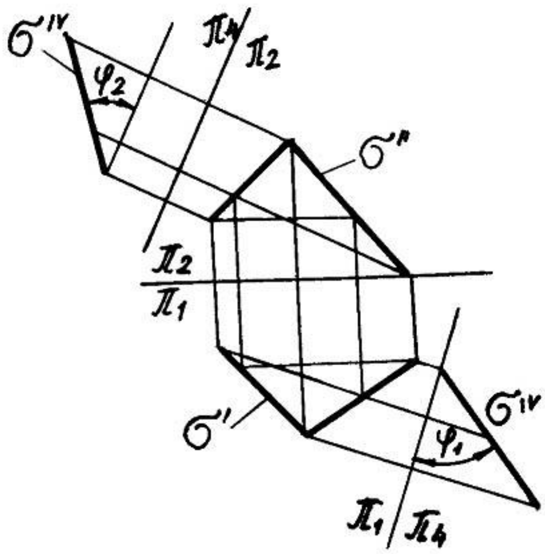


Рис.1.230

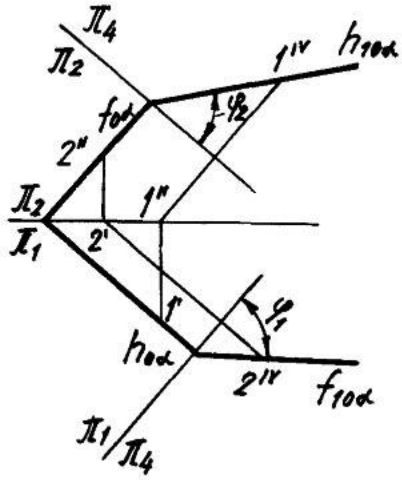


Рис.1.231

Эта задача может быть решена с использованием линии наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций. Пример решения рассмотрен ранее (см. §13).

§33. Определение действительной величины плоской фигуры и части поверхности

Отметим два вида геометрических задач на определение части поверхности:

- определение действительной величины и формы плоского элемента поверхности (грани, сечения поверхности плоскостью и т.д.). Решение этой задачи сводится к применению четвертой задачи преобразования чертежа. Пример решения задачи дан на рис.1.232;

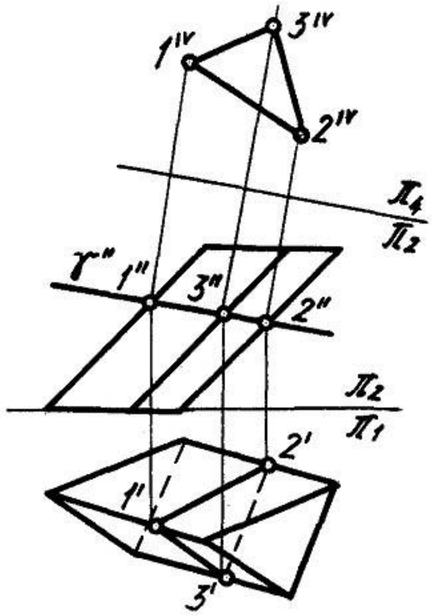


Рис.1.232

- определение действительной величины и формы части поверхности или полной поверхности путем совмещения всех точек ее с плоскостью, т.е. путем построения развертки поверхности.

При рассмотрении поверхностей указывалось, что некоторые из них могут быть совмещены с плоскостью без образования разрывов и складок, а некоторые (неразвертываемые) не могут быть совмещены с плоскостью указанным образом. В этих случаях возможно построение лишь приближенной развертки.

Рассмотрим примеры развертывания некоторых видов поверхностей.

1. Развертывание пирамидальных и конических поверхностей.

Боковая поверхность пирамиды представляет собой ряд треугольных граней. Если будут известны размеры всех сторон этих треугольников, то совокупность их, построенная в определенной последовательности на плоскости, будет представлять развертку боковой поверхности пирамиды. На рис.1.233 показано построение развертки пирамиды.

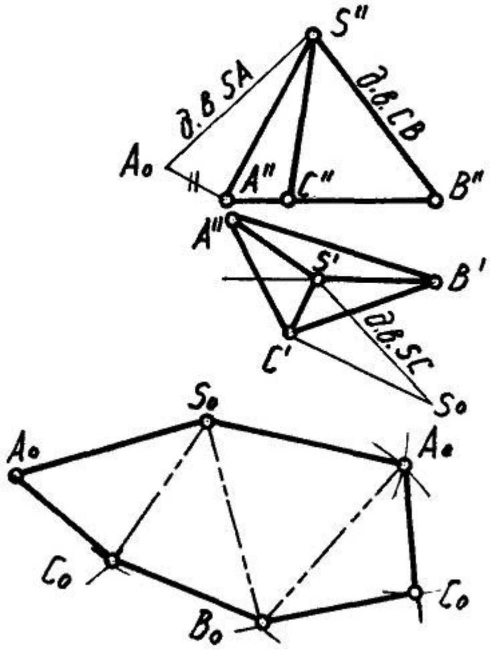


Рис.1.233

Действительные длины ребер в данном случав определены способом прямоугольного треугольника. Развертка построена с использованием циркуля.

Поверхность прямого кругового конуса можно построить известным из курса средней школы графоаналитическим способом. Для построения развертки наклонного конуса в него вписывают пирамиду. В результате этого развертка конической поверхности заменяется описанной выше разверткой пирамидальной поверхности. При этом чем больше граней будет содержать вписанная пирамида, тем ее развертка будет ближе к действительной развертке заданной конической поверхности.

2. Развертывание призматических и цилиндрических поверхностей.

Боковые грани призмы можно, проведя диагонали, разделить на треугольники, и, таким образом, построение, развертки привести к рассмотренному выше на примере пирамиды способу. Построение развертки мало отличается от ранее распространенного, поэтому не приводится.

Рассмотрим второй способ построения развертки призм - способ нормального сечения.

Боковую поверхность призмы (рис.1.234) рассекают плоскостью, перпендикулярной к ее ребрам.

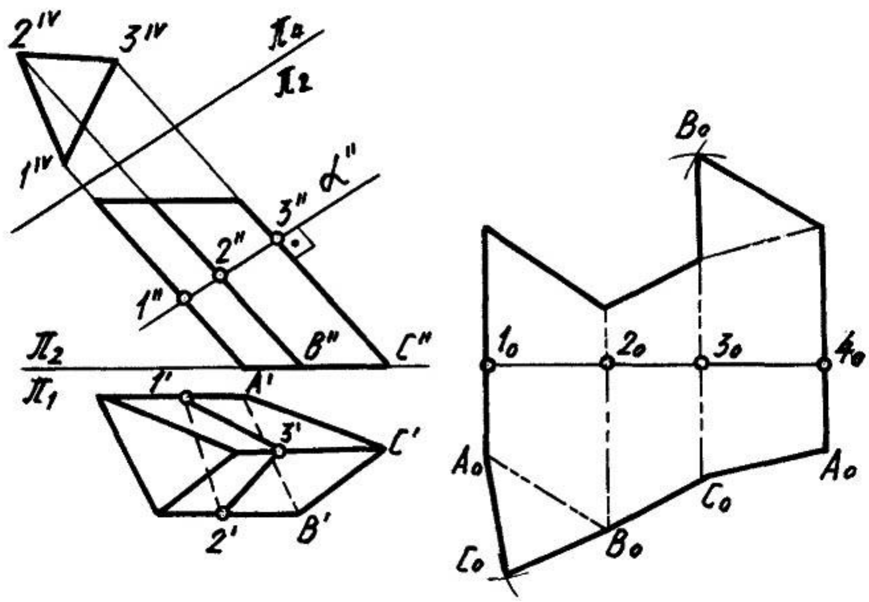


Рис.1.234

Определяют действительную величину каждой стороны полученного нормального сечения. Строят развертку нормального сечения и из точек развертки 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, соответствующих вершинам нормального сечения, проводят перпендикуляры к линии развертки сечения. В обе стороны от линии развертки на перпендикулярах откладывают отрезки ребер призмы. Как видно из рассмотренного примера, применение этого способа удобно при положении призмы, параллельном плоскости проекций. В случае общего положения призмы относительно плоскостей проекций ее следует известным способом привести к рассмотренному удобному положению.

Для построения развертки наклонного цилиндра его поверхность заменяется вписанной призматической поверхностью.

3. Приближенное развертывание сферической поверхности.

Сфера относится к неразвертываемым поверхностям. В связи с этим может быть получена лишь приближенная ее развертка. Рассмотрим один из способов приближенной развертки сферы.

Разобьём сферу горизонтально-проецирующими плоскостями α_1, α_2, ..., проходящими через ее центр, на ряд одинаковых сферических элементов (6 частей) (рис.1.235).

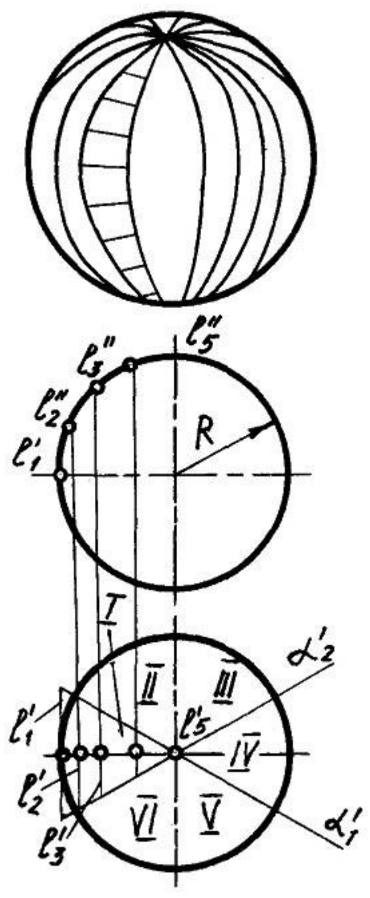


Рис.1.235

Выделим и рассмотрим один такой элемент (рис.1.236).

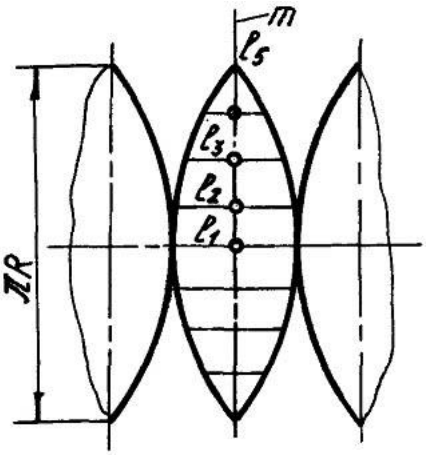


Рис.1.236

Заменим его сферическую поверхность на цилиндрическую, касательную к сферической (фронтальные проекция цилиндрических образующих - l_1'', l_2'', l_3'' и т.д., горизонтальные проекции - l_1', l_2', l_3' и т.д.). На свободном поле чертежа проведем вертикальную прямую m, на которой отложим длину дуги πR, где R - радиус сферы. Разобьем этот отрезок на 8 равных частей, соответствующих делению окружности. Отложим натуральную величину соответствующих образующих $l_1=l_1'$, $l_2=l_2'$ и т.д. получим точки, которые следует соединить плавной кривой. Таким образом, получим приближенную развертку сферического элемента.

Для построения полной развертки сферы необходимо вычертить развертки элементов в количестве, равном числу элементов, на которые разделена сфера.

Построение разверток различных поверхностей широко применяется в инженерной практике, например, при изготовлении деталей из тонколистового материала.

На рис.1.237 показан ряд деталей, для изготовления которых необходимо построение чертежа разверток.

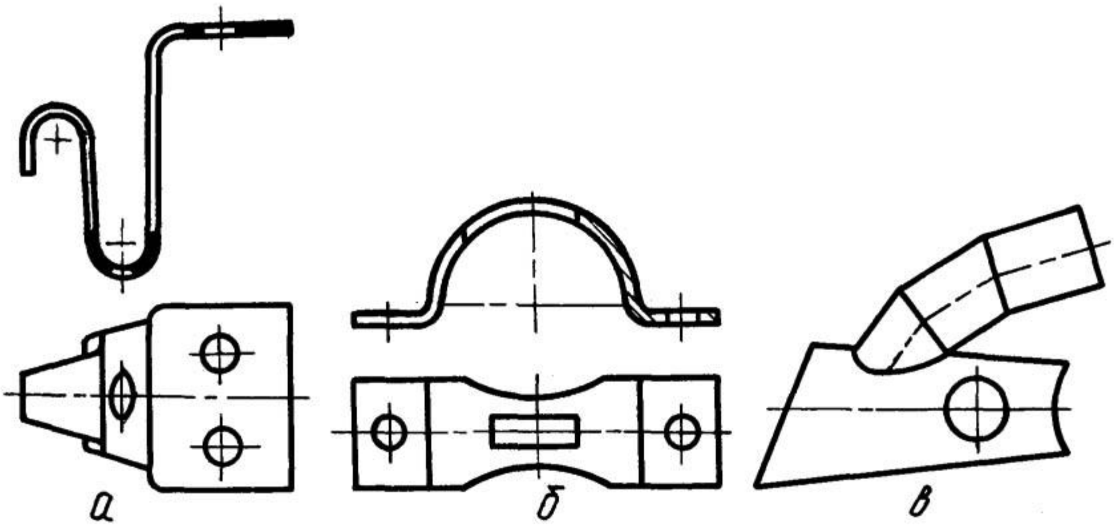


Рис.1.237

ГЛАВА XII. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

§34. Основные графические операции и их запись

Решение геометрических задач на комплексном чертеже заключается в выполнения в определенном порядке некоторых действий. Каждое действие обосновано выбранным способом проецирования, свойствами проекций и возможностью его реализация на чертеже при помощи основных инструментов графических построений - циркуля и линейки.

Правило, которое указывает, опираясь на исходные данные, какие действия и в какой последовательности надо выполнять, чтобы решить задачу, называется алгоритмом решения.

Рассмотрим составление алгоритма решения на примере:

Задача. Построить проекции точки пересечения прямой общего положения a (a', a'') и плоскости α (b||c) (рис.1.238).

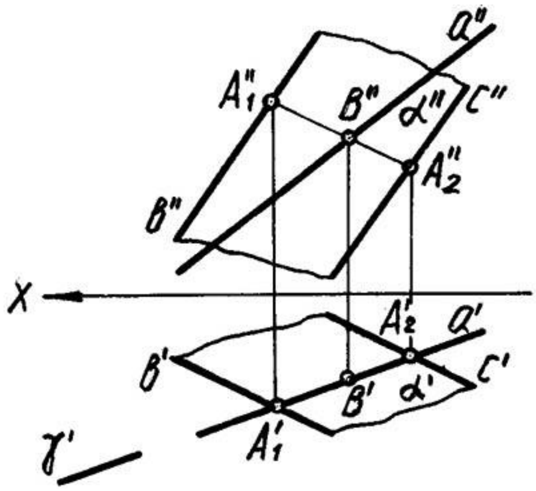


Рис.1.238

Решение задачи.

1. Через данную прямую проводят вспомогательную проецирующую плоскость, например, γ (γ'): a∈γ, γ⊥π_1.

2. Строят линию пересечения (A_1, A_2) (A_1', A_2', A_1'', A_2'') этой вспомогательной проецирующей плоскости γ (γ') с данной плоскостью α ($B||C$); (A_1, A_2)$=\gamma\cap\alpha$.

3. Строят точку пересечения B (B', B'') данной прямой (A_1, A_2): $B=a\cap(A_1, A_2)$; $(A_1, A_2)\in\alpha$; $B=a\cap\alpha$.

Или кратко запишем так:

1) $a\in\gamma$; $\gamma\perp\pi_1$;

2) $(A_1, A_2)=\gamma\cap\alpha$;

3) $B=(A_1, A_2)\cap a$.

Совокупность этих трех действий, выполняемых в указанной последовательности, является алгоритмом решения задачи.

Опираясь на этот алгоритм, можно формализовать решение, т.е. записать его в виде последовательного выполнения элементарных графических операций. Результатом каждой такой операции является прямая линия или точка пересечения прямых линий.

1. Отметить точку A_1', пересечения прямых a' и b'.

2. Отметить точку A_2' пересечения прямых a' и c'.

3. Построить прямую (линию связи), проходящую через точку A_1', перпендикулярно оси x.

4. Отметить точку A_1'' пересечения этой линии связи и прямой b''.

5. Построить прямую (линию связи), проходящую через точку A_2', перпендикулярно оси x.

6. Отметить точку A_2'' пересечения этой линии связи с прямой c''.

7. Построить прямую, проходящую через точки A_1'' и A_2''.

8. Отметить точку B'' пересечения прямых (A_1'', A_2'') и a''.

9. Построить прямую (линию связи), проходящую через точку B'' перпендикулярно оси x.

10. Отметить точку B' пересечения этой линии связи и прямой a'.

Алгоритм, который указывает, какие графические операции и в какой последовательности надо выполнять, чтобы решить задачу, назовем алгоритмом графических построений.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Указания по выбору варианта

Условия задач контрольной работы №1 индивидуальные. Они представлены в вариантах. Студент выполняет тот вариант, номер которого соответствует последним двум цифрам его учебного шифра по студенческому билету. Например, если учебный шифр студента 2910029, то вариант всех заданий контрольной работы № 1 будет 29 (аналогично для контрольных работ №2 и №3). Если же номер получился больше 30, то от него следует отнимать 30, пока не получится число равное 30 или меньше.

Теоретическая часть

1. Инженерная графика, ее задачи.

2. Центральное и параллельное проецирование.

3. Основные инвариантные свойства параллельного проецирования.

4. Способы построения чертежей.

5. Комплексный чертёж Монжа.

6. Координаты и проекции точки.

7. Проекции прямой общего и частного положения.

8. Свойства ортогонального проецирования.

9. Проекции плоскостей общего и частного положения.

10. Изображения поверхностей вращения на чертеже.

11. Изображения многогранников на чертеже.

12. Определение позиционных задач.

13. Относительное положение точки и прямой линии, двух прямых, точки и простейшей поверхности.

14. Относительное положение плоскостей.

15. Параллельные плоскости.

16. Пересекающиеся плоскости.

17. Пересечение простейших поверхностей плоскостью частного положения.

18. Пересечение двух поверхностей.

19. Метод вспомогательных секущих плоскостей.

20. Метод секущих концентрических сфер с постоянным центром вращения.

21. Относительное положение прямой линии и простейшей поверхности.

22. Параллельность прямой и плоскости.

23. Пересечение прямой с плоскостью.

24. Пересечение прямой с поверхностью вращения и многогранником.

25. Способ замены плоскостей проекций.

26. Основные типы задач, решаемые этим способом.

27. Понятие о метрических задачах.

28. Определение расстояний, углов, действительной величины плоской фигуры, части поверхности.

29. Понятие о развёртках.

30. Развёртки многогранников, цилиндрических и конических поверхностей.

31. Определитель поверхности.

32. Каркасный и кинематический способы задания поверхности.

33. Классификация поверхностей.

34. Линейчатые и нелинейчатые поверхности.

35. Позиционные задачи с линейчатыми поверхностями.

Практическая часть

В табл.2.1. дан объем и содержание контрольной работы №1 для студентов специальности «Информатика и технологии программирования». Условия задач и методические указания по их выполнению представлены в табл.2.1.

Таблица 2.1

Содержание задачи	№ задачи	Формат	Пример выполнения
1	2	3	4
Построить проекции равностороннего треугольника…	3**	А3	Рис.2.2
Построить проекции параллелограмма….	4**		
По двум данным проекциям конуса или цилиндра построить третью проекцию	5		
Построить линии пересечения заданных поверхностей	7	А3	Рис.2.4
Построить третье изображение по двум заданным. Выполнить разрезы и сечения	8	А3	Рис.2.5

Примечание: ** - выполнить либо задачу 3, либо задачу 4 в зависимости от варианта.

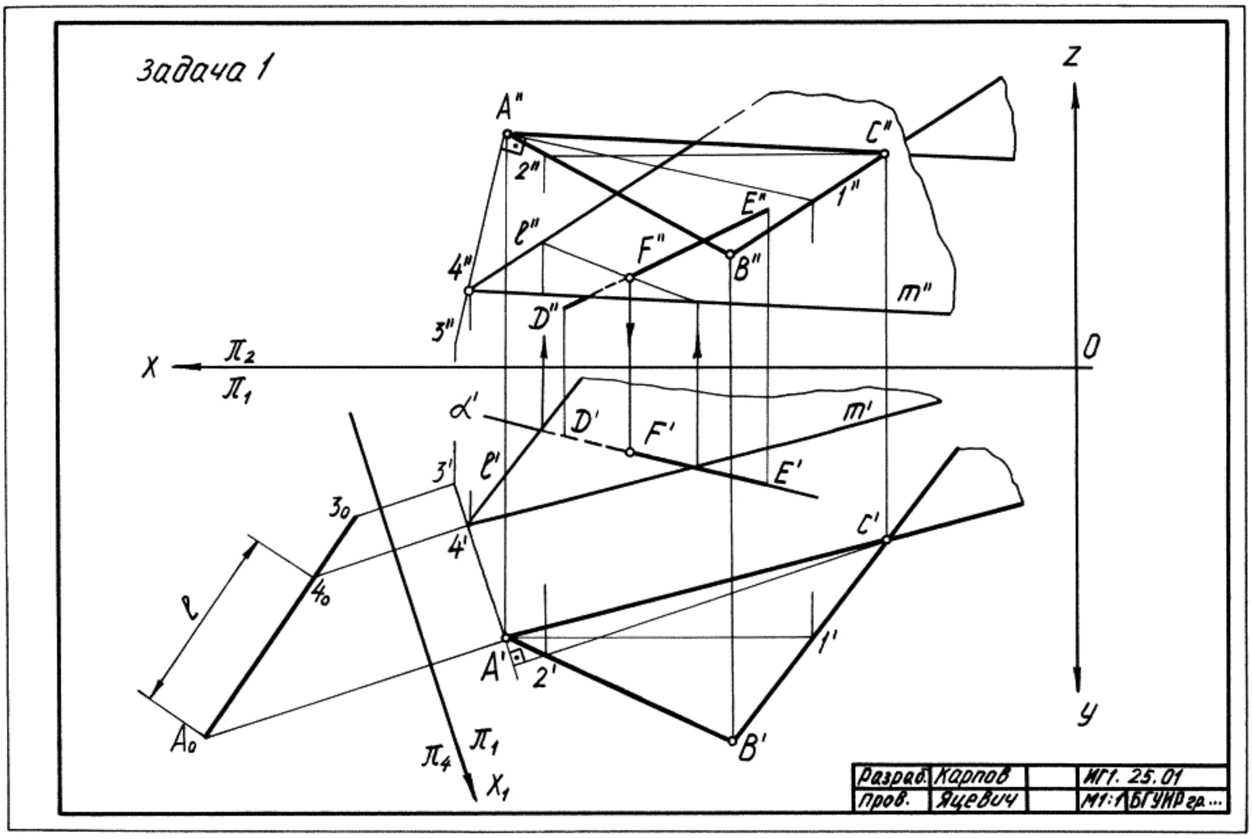

задача 1
Разраб. Карпов
Пров. Яцевич
ИГ1. 25.01
М1:1 БГУИР гр...

Рис.2.1

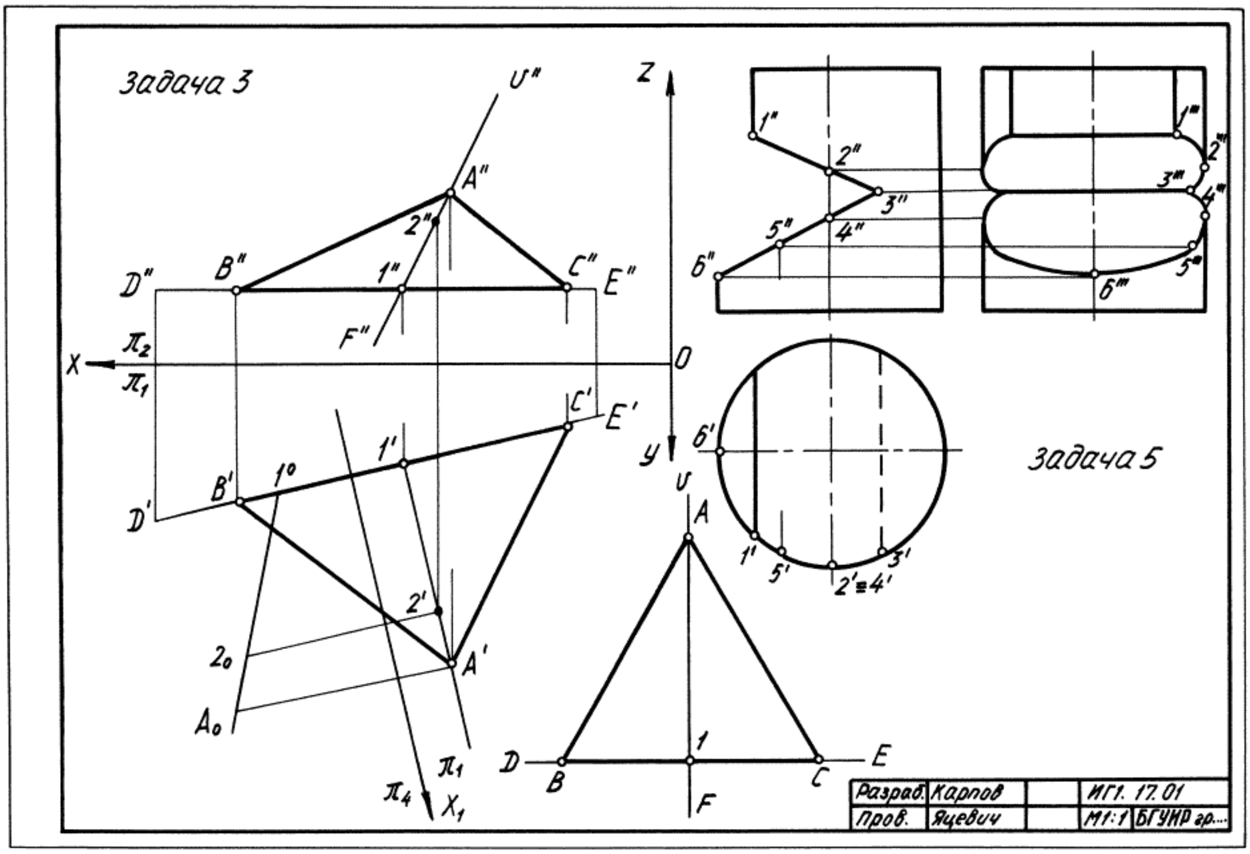
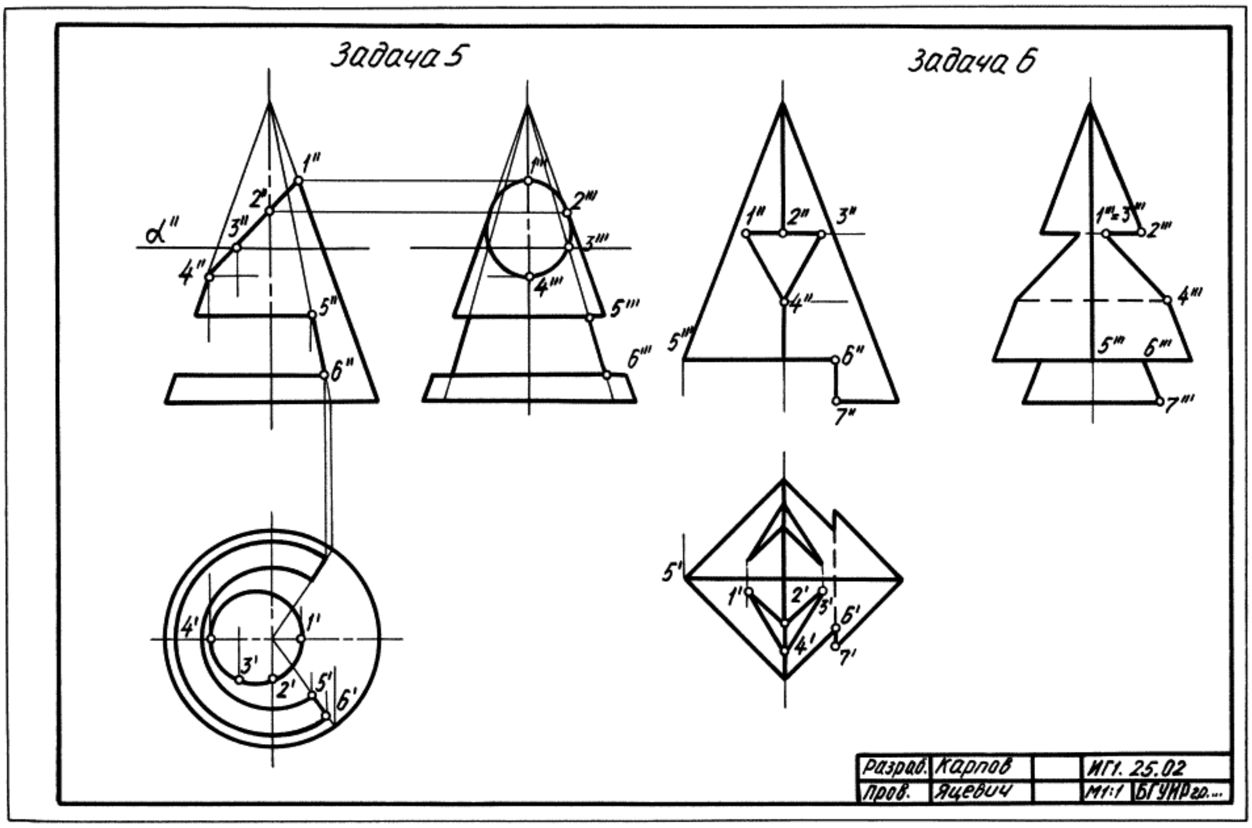
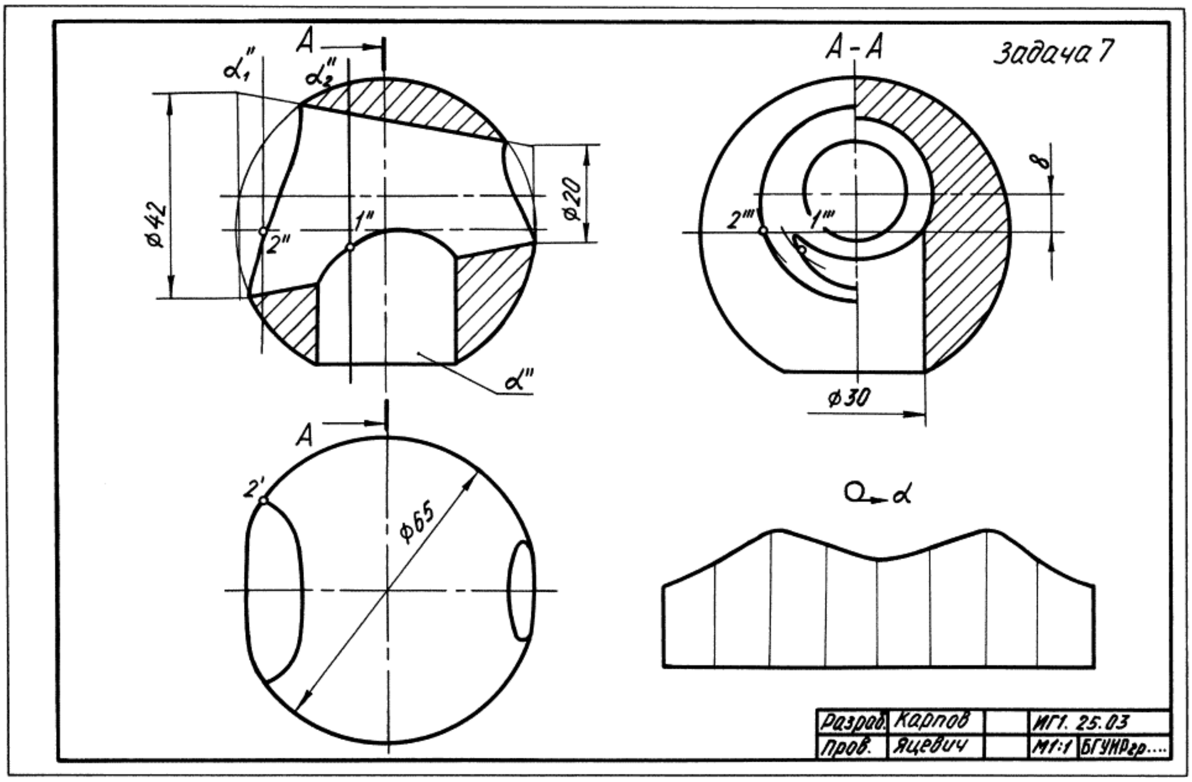

задача 3
задача 5
Разраб. Карпов
Пров. Яцевич
ИГ1. 17.01
М1:1 БГУИР гр...

Рис.2.2



Задача 5
Задача 6
Разраб. Карпов
Пров. Яцевич
ИГ1. 25.02
М1:1 БГУИРгр....

Рис.2.3



А
А-А
Задача 7
ф42
ф20
ф30
ф65
8
Разраб. Карпов
Пров. Яцевич
ИГ1. 25.03
М1:1 БГУИРгр....

Рис.2.4

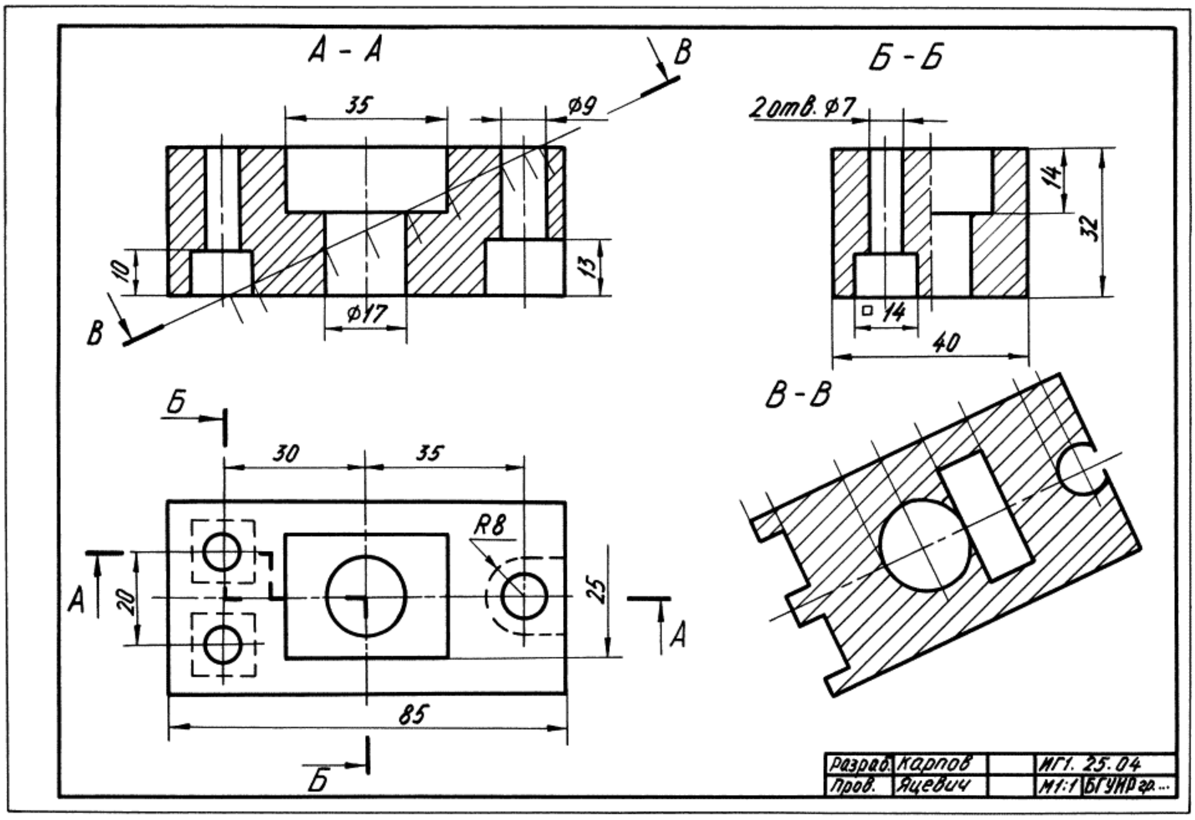

А - А
В
35
Ø9
10
13
Ø17
Б - Б
2отв. Ø7
14
32
□ 14
40
В - В
Б
30
35
R8
А
20
25
85
Разраб. Карпов
Пров. Яцевич
ИГ1. 25.04
М1:1 БГУИР гр...

Рис.2.5

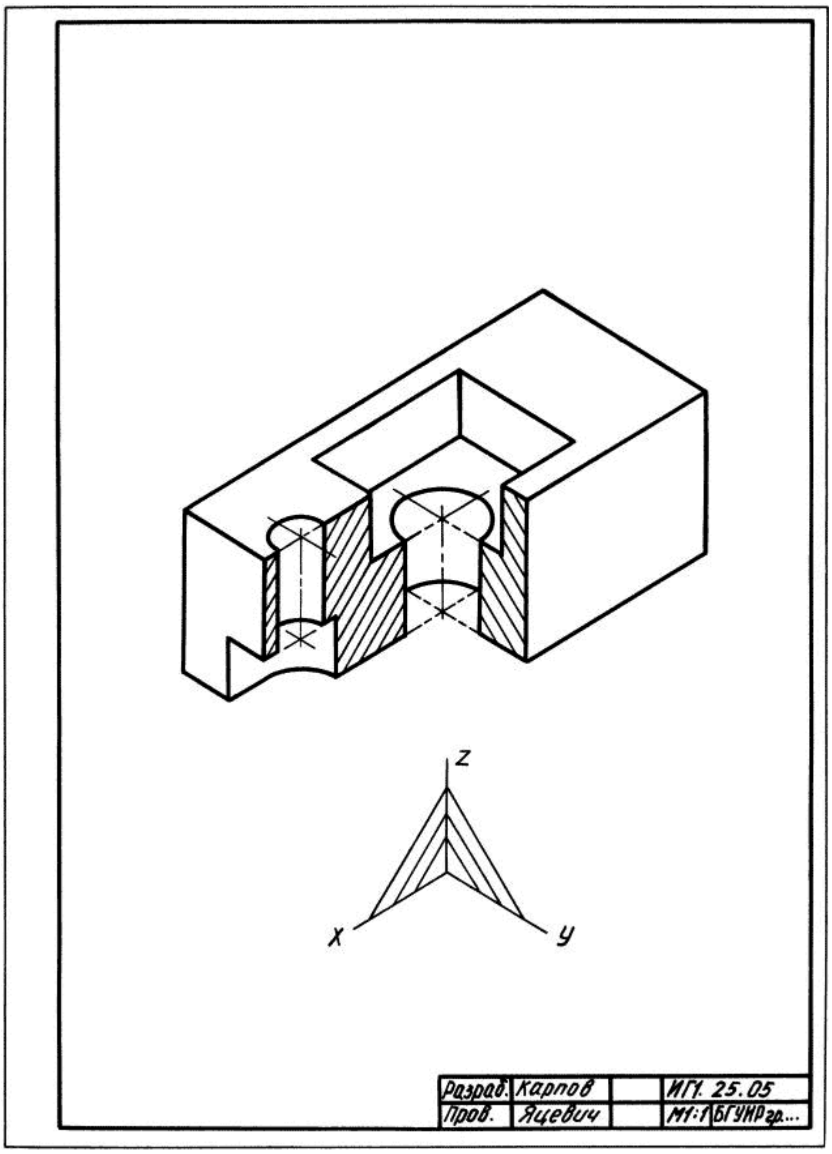


Рис.2.6

Задача 1 (выполняется только для чётных вариантов). Найти на прямой ED проекции точки, отстоящей от плоскости треугольника ABC на расстоянии 50 мм. Данные для своего варианта взять из табл.2.2.

Таблица 2.2

Вариант	Координаты	Точки				
		A	B	C	D	E
1	2	3	4	5	6	7
2, 16		90 50 40	40 125 75	10 65 10	50 50 10	0 15 70
4, 18		85 90 90	35 125 30	0 65 65	85 30 45	30 35 50
6, 20		70 130 30	30 70 10	0 100 70	60 80 80	10 45 35
8, 22	x y z	155 90 90	105 125 30	70 65 65	155 30 45	100 35 50
10, 24		140 10 85	90 45 120	60 25 55	140 50 35	80 25 60
12, 26		155 90 90	105 125 30	70 65 65	150 75 10	70 10 5
14, 28		145 50 90	95 65 55	60 25 75	105 40 60	70 10 5

Указания к решению задачи 1. Намечают оси координат и по заданным координатам строят две проекции плоскости, заданной ΔABC, а также прямой DE. Искомая точка - это точка пересечения прямой DE с плоскостью, проведенной параллельно плоскости ΔABC и отстоящей от последнего на расстоянии L, мм.

1. Из любой точки заданной плоскости проводят перпендикуляр к ней.

2. Определяют натуральную величину произвольно взятого отрезка перпендикуляра, находят на нем точку, отстоящую от плоскости на расстоянии L, мм.

3. Через эту точку проводят плоскость, параллельную заданной.

4. Находят точку пересечения заданной прямой с построенной плоскостью.

ВНИМАНИЕ. Способы преобразования чертежа могут быть использованы только при выполнении пунктов 2 и 4.

Пример выполнения задачи 1 приведен на рис.2.1.

Задача 2 (выполняется только для нечётных вариантов). Построить проекции сферы радиусом 50 мм, касательной к плоскости ΔABC, если дана фронтальная (горизонтальная) проекция точки D - центра сферы. Данные для своего варианта взять из табл.2.3.

Таблица 2.3

Вариант	Координаты	Точки			
		A	B	C	D
1	2	3	4	5	6
1, 15	x	70	30	0	65
	y	130	70	100	-
	z	30	10	70	55

Окончание таблицы 2.3

1	2	3	4	5	6
3, 17	x y z	80 50 40	30 125 75	0 65 10	0 - 75
5, 19		80 10 85	30 45 120	0 25 55	45 - 60
7, 21		85 90 90	35 125 30	0 65 65	85 - 45
9, 23		85 80 100	35 115 55	0 75 75	85 - 55
11, 25		70 130 30	30 70 10	0 100 70	65 55 -
13, 27		80 50 40	30 125 75	0 65 10	0 55 -

Указания к решению задачи 2. Решение задачи сводится к определению второй проекции точки D - центра сферы. Недостающую проекцию точки можно найти, зная, что она будет принадлежать плоскости, проведенной параллельно данной плоскости на расстоянии 50 мм от последней. План решения задачи 2 аналогичен плану решения задачи 1.

Задача 3 (выполняется только для нечётных вариантов). Построить равносторонний треугольник ABC с основанием BC, равным 100 мм, лежащим на прямой DE, и высотой с вершиной A на прямой FV.

Данные для своего варианта взять в табл.2.4.

Таблица 2.4

Вариант	Координаты	Точки			
		D	E	F	V
1	2	3	4	5	6
1, 15, 29	x y z	150 60 20	0 20 20	50 - 100	85 - 0
3, 17	x y z	120 25 0	40 25 50	90 10 -	50 110 -
5, 19	x y z	70 60 30	30 20 30	105 - 10	70 - 105
7, 21	x y z	15 100 70	155 100 110	110 15 -	80 120 -
9, 23	x y z	140 115 90	5 65 90	70 - 100	100 - 10

Окончание таблицы 2.4

1	2	3	4	5	6
11, 25	x y z	130 130 25	20 0 25	90 - 10	30 - 105
13, 27	x y z	110 140 15	0 10 15	50 - 0	105 - 80

Указания к решению задачи 3:

1. В левой половине листа намечают оси координат и по заданным координатам строят две проекции прямой DE и горизонтальную (фронтальную) проекцию прямой FV.

2. На свободном поле чертежа строят ΔABC. Отрезок [1A]∈FV и является высотой ΔABC.

3. Вторую проекцию прямой FV строят на основании теоремы о проецировании прямого угла.

4. Определяют натуральную величину произвольного отрезка прямой FV. Находят на нем точку A.

Или другой способ решения:

Способом замены плоскостей проекций определяют натуральную величину произвольного отрезка высоты. Зная величину высоты треугольника ABC, определяют положение проекций точки A.

Пример выполнения задачи 3 приведен на рис.2.2 (слева).

Задача 4 (выполняется только для чётных вариантов). Построить параллелограмм ABCD со стороной AB длиной 100 мм, расположенной на прямой AE; высота параллелограмма на прямой FV, проходящей через вершину параллелограмма; длина боковой стороны равна 60 мм. Данные для своего варианта взять из табл.2.5.

Таблица 2.5

Вариант	Координаты	Точки			
		A	E	F	V
1	2	3	4	5	6
2, 16, 30	x y z	100 40 35	10 130 35	50 - 15	0 - 110
4, 18	x y z	0 10 10	90 10 100	70 0 -	10 60 -
6, 20	x y z	15 20 50	100 20 135	65 10 -	125 70 -
8, 22	x y z	90 140 15	0 35 15	30 - 0	85 - 80
10, 24	x y z	130 130 25	20 0 25	90 - 10	30 - 105
12, 26	x y z	120 115 90	10 75 90	50 - 100	80 - 10

Окончание таблицы 2.5

14, 28	x y z	15 100 70	140 100 100	110 15 -	80 120 -

Указания к решению задачи 4:

1. В левой половине листа намечают оси координат и по заданным координатам строят две проекции прямой AE и горизонтальную (фронтальную) проекции прямой FV.

2. На свободном поле чертежа строят параллелограмм ABCD. Точка 1 пересечения прямых AE и FV является основанием высоты параллелограмма. При построении параллелограмма целесообразно использовать отрезок [A1]. Дальнейший план решения аналогичен плану задачи 3.

Задача 5. По двум заданным проекциям конуса или цилиндра (в зависимости от варианта) со срезами и сквозными пазами, образованными плоскостями частного положения, достроить горизонтальную и построить профильную проекции. Данные для своего варианта взять из рис.2.7.

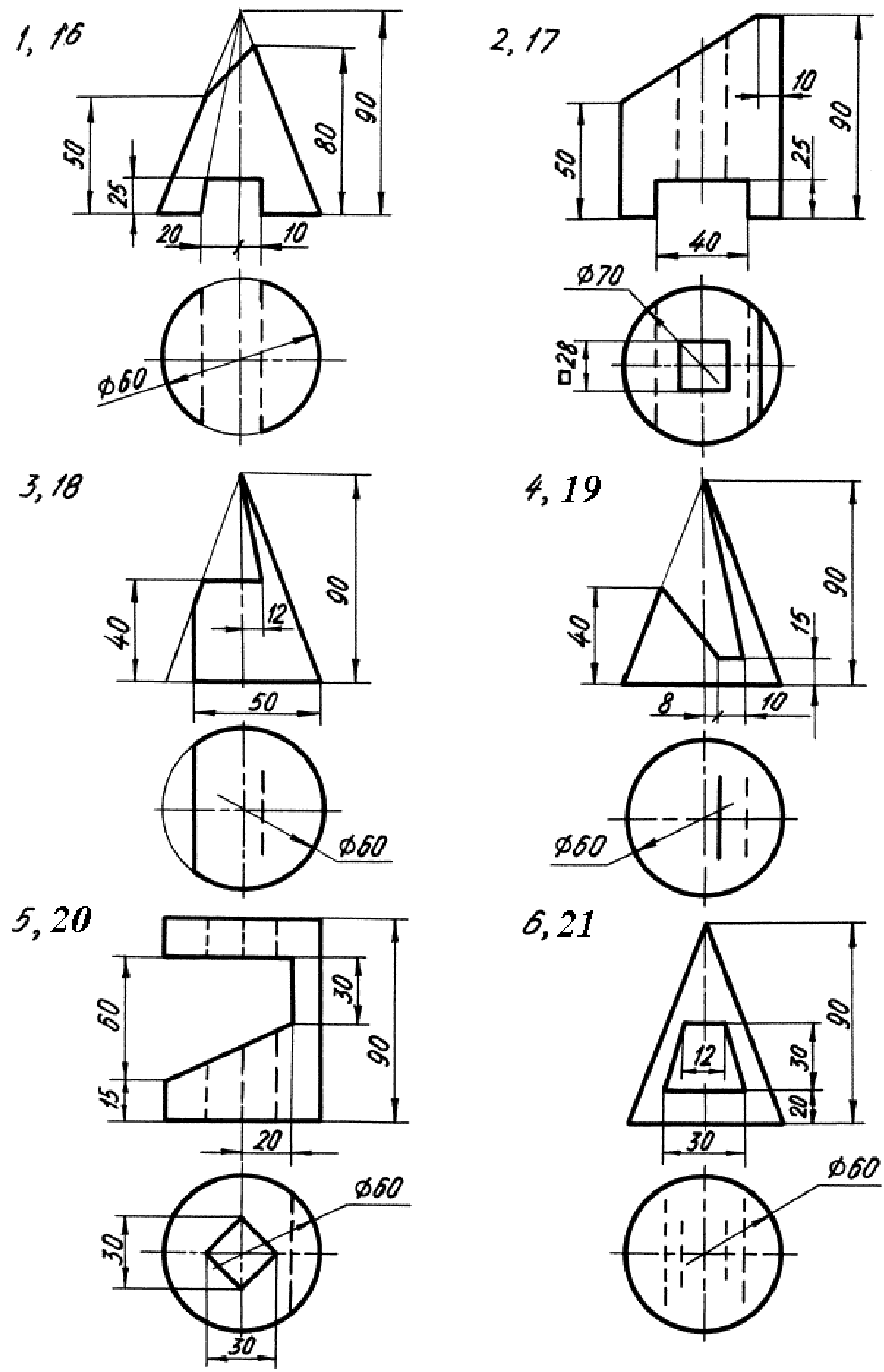


Рис.2.7 Варианты задачи 5: 1-6, 16-21

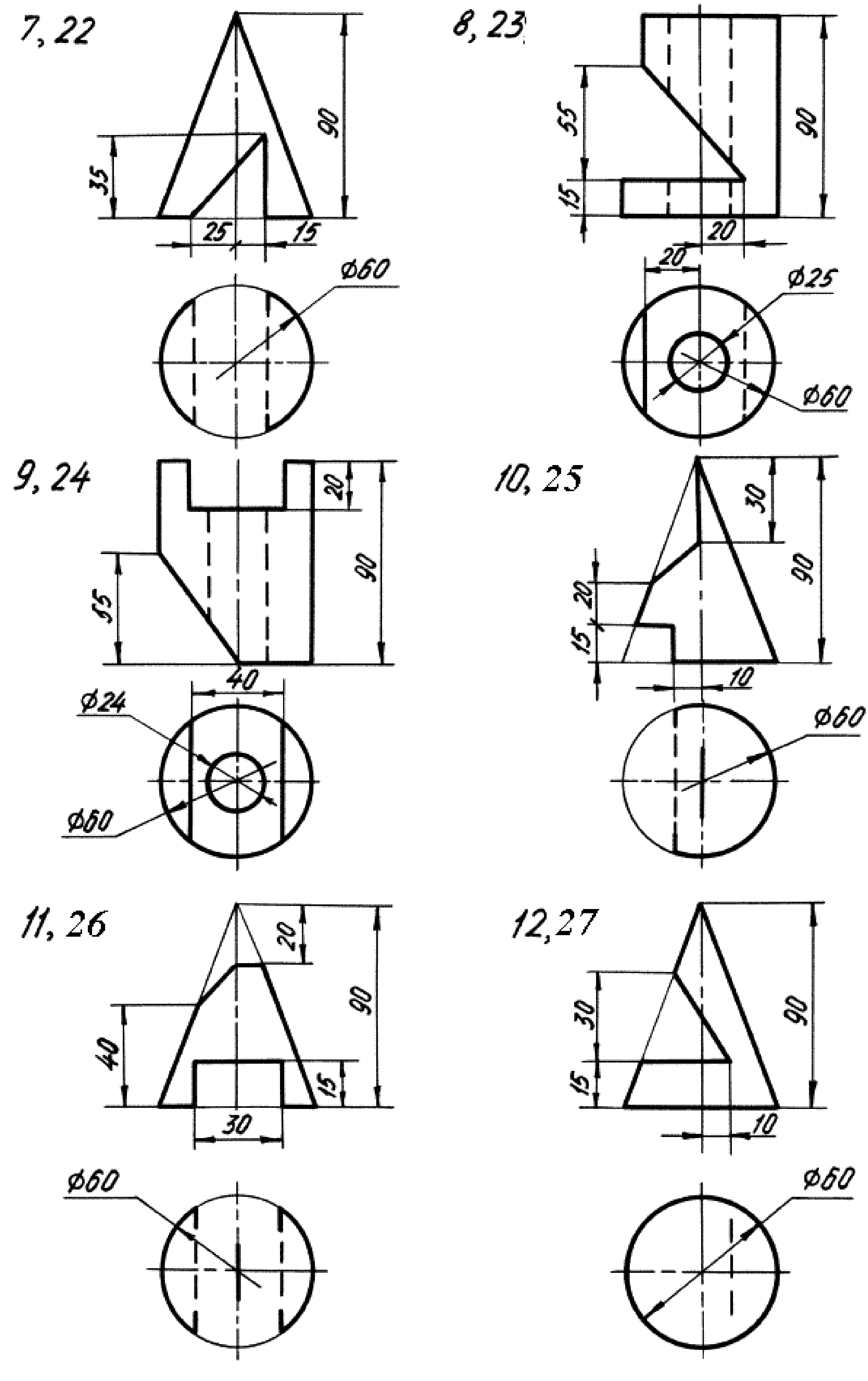


Рис.2.7 Варианты задачи 5: 7-12, 22-27

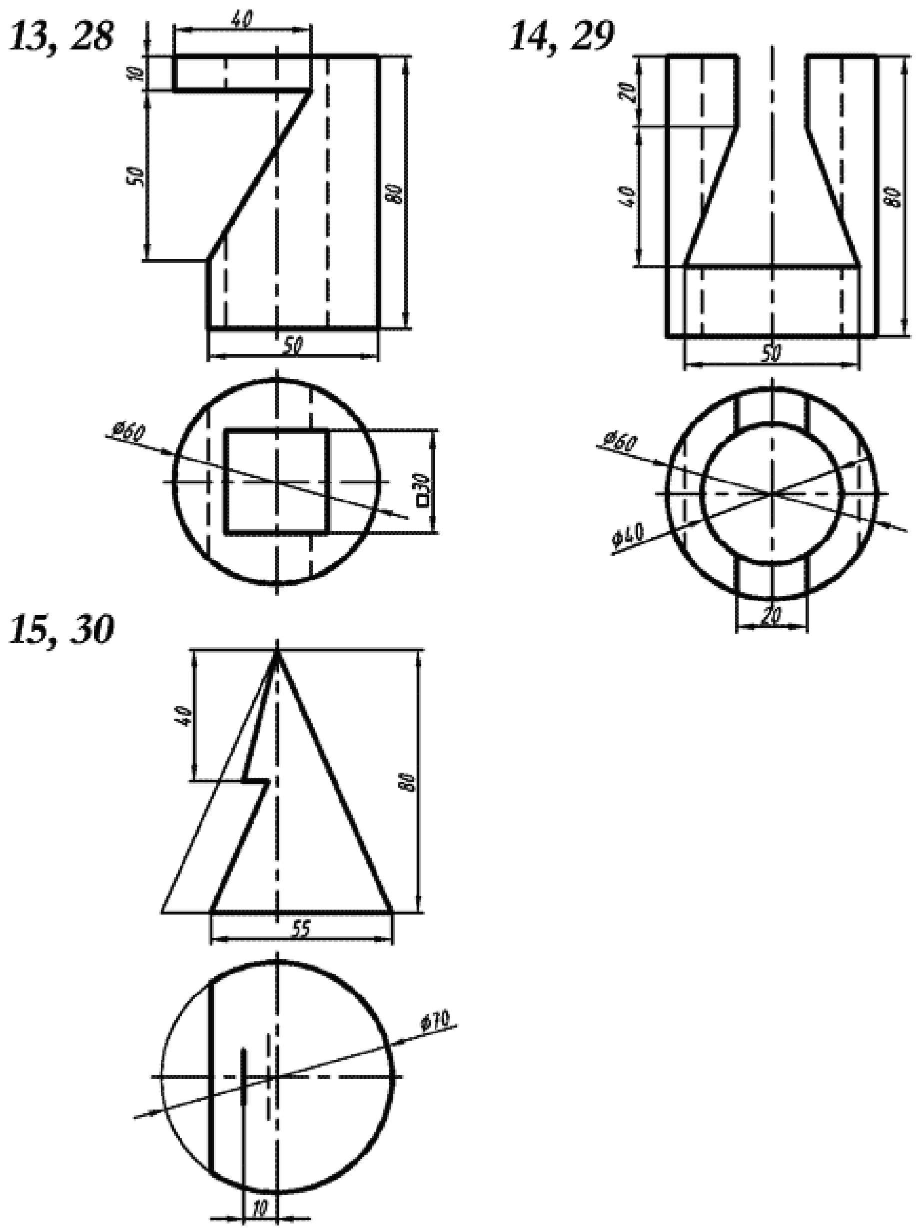


Рис.2.7 Варианты задачи 5: 13-15, 28-30

Указания к решению задачи 5.

При построении проекций линии (линий) пересечения конуса или цилиндра плоскостью целесообразно воспользоваться способом вспомогательных секущих плоскостей или алгоритмом принадлежности точки поверхности. В качестве вспомогательных удобно применять плоскости уровня, например, горизонтальная секущая плоскость α на рис.2.3. Построение линии следует начинать с определения опорных точек, и при необходимости проекций центров эллипсов. Определить видимость.

Пример выполнения задачи 5 приведен на рис.2.2 (справа) и рис.2.3 (слева).

Задачу 5 дополнить:

- только для специальности РЭС - на формате А3 совместно с задачей 6 (рис.2.3);

- для всех остальных специальностей - на формате А3 совместно с задачей 3 либо 4 (рис.2.2).

Задача 6. По двум заданным проекциям призмы или пирамиды (в зависимости от варианта) со сквозными вырезами и срезами, образованными плоскостями частного положения, достроить горизонтальную и построить профильную проекцию. Данные для своего варианта взять из рис.2.8.

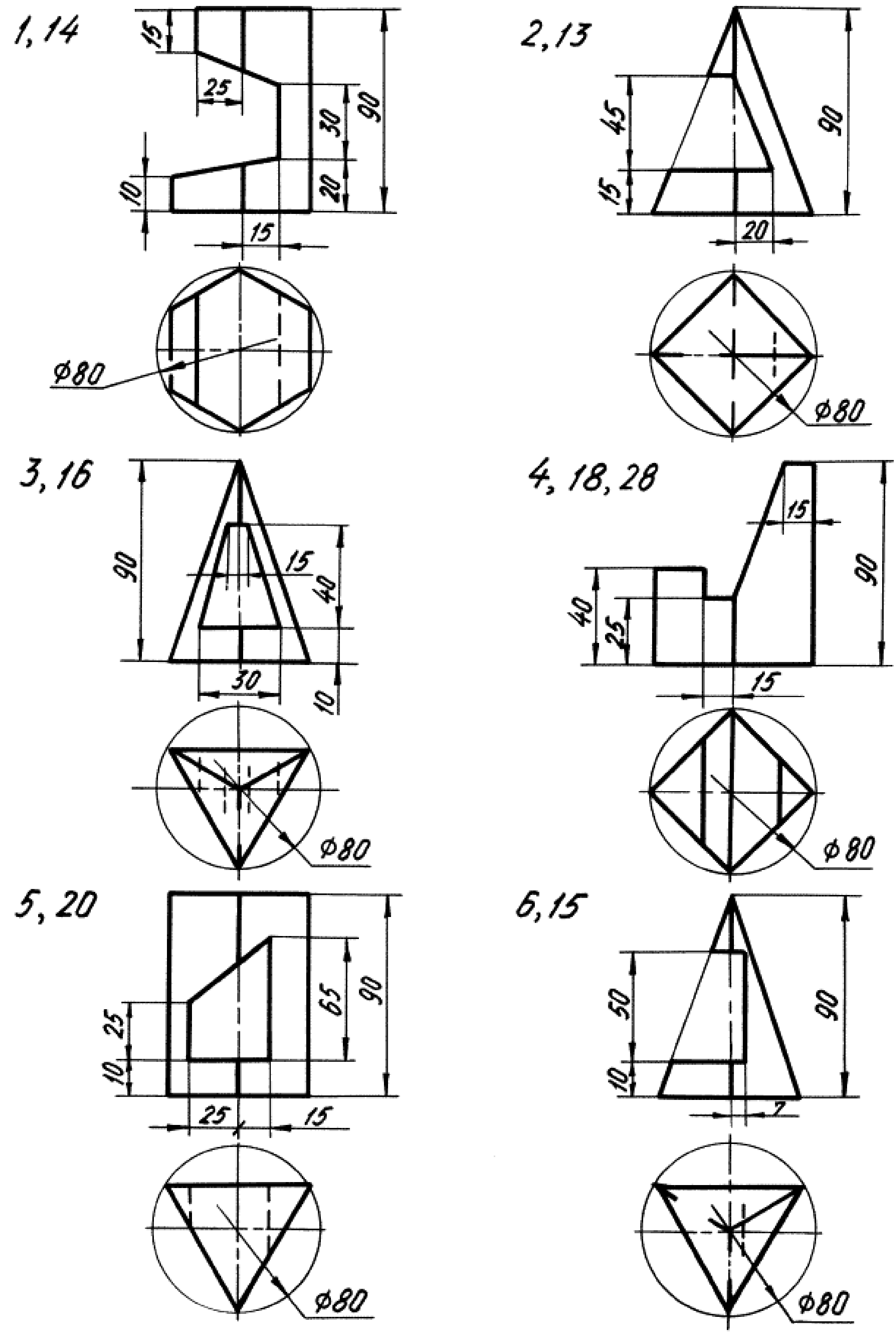


Рис.2.8 Варианты задачи 6: 1-6, 13-16, 18, 20, 28

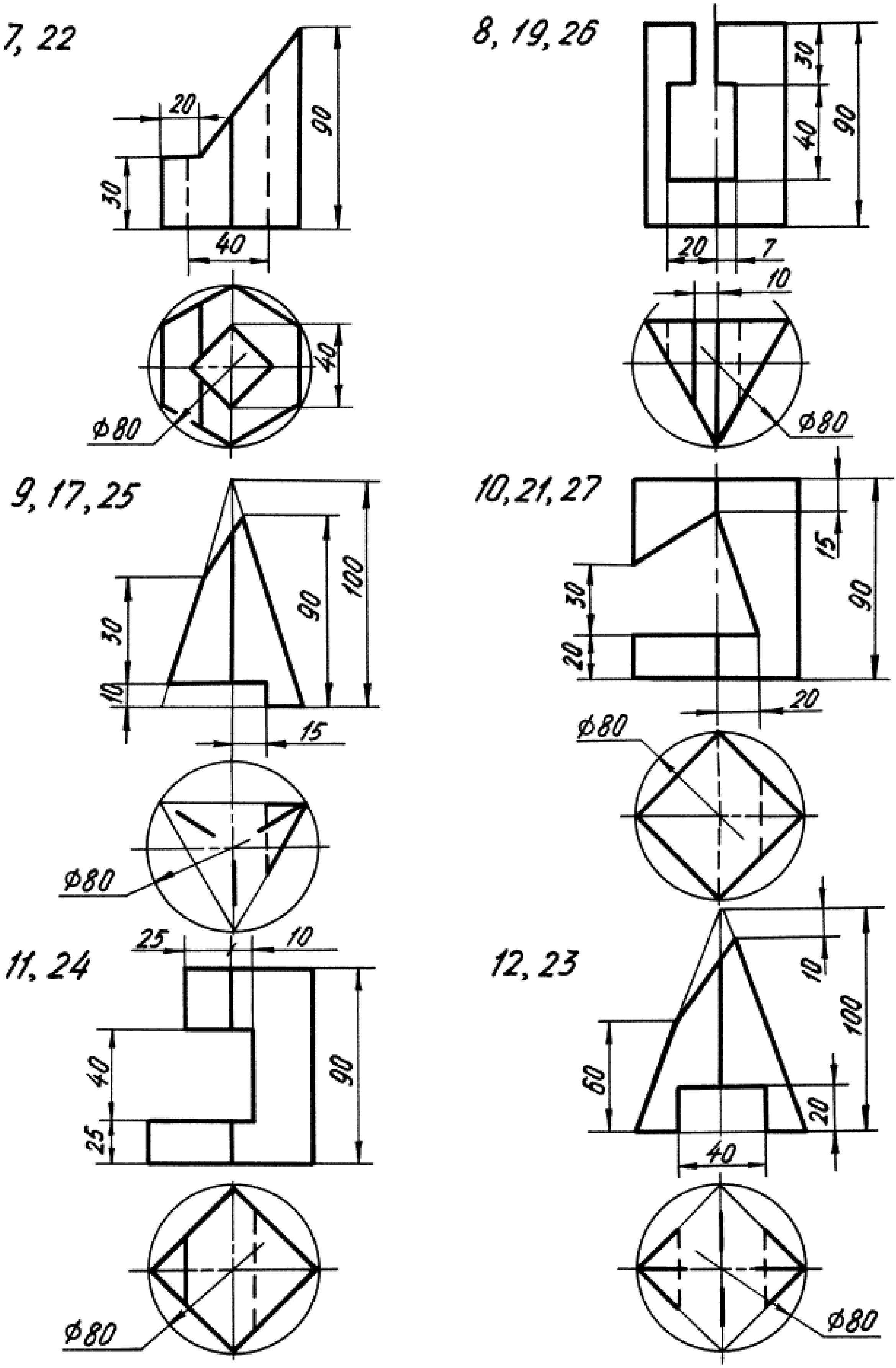


Рис.2.8 Варианты задачи 6: 7-12, 17, 19, 21-27

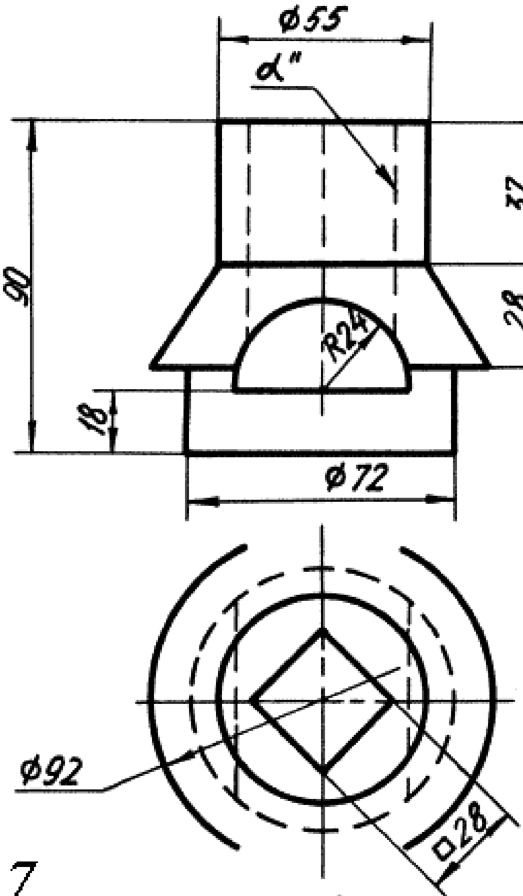
Указания к решению задачи 6.

При пересечении призмы или пирамиды плоскостью в сечении получается плоская фигура - многоугольник, вершинами которого являются точками пересечения ребер с этой плоскостью. Определить видимость.

Пример выполнения задачи 6 приведен на рис.2.3 (справа).

Задача 7. Построить три изображения с определением линий пересечения между заданными (рис.2.9) поверхностями, выполнить указанные в табл.2.6 разрезы. Нанести размеры.

1, 16



2, 17

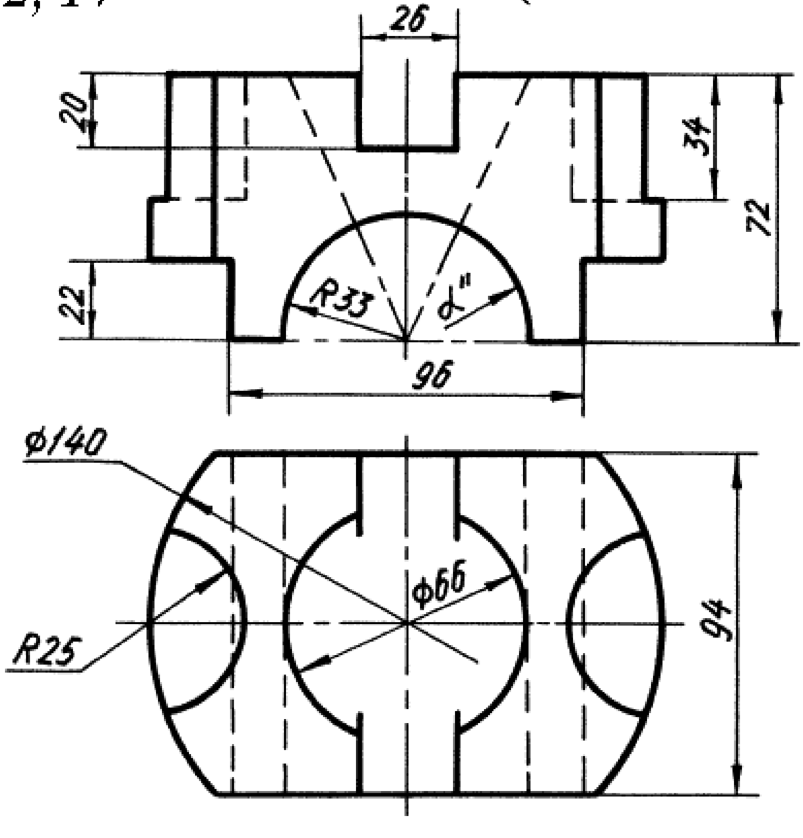
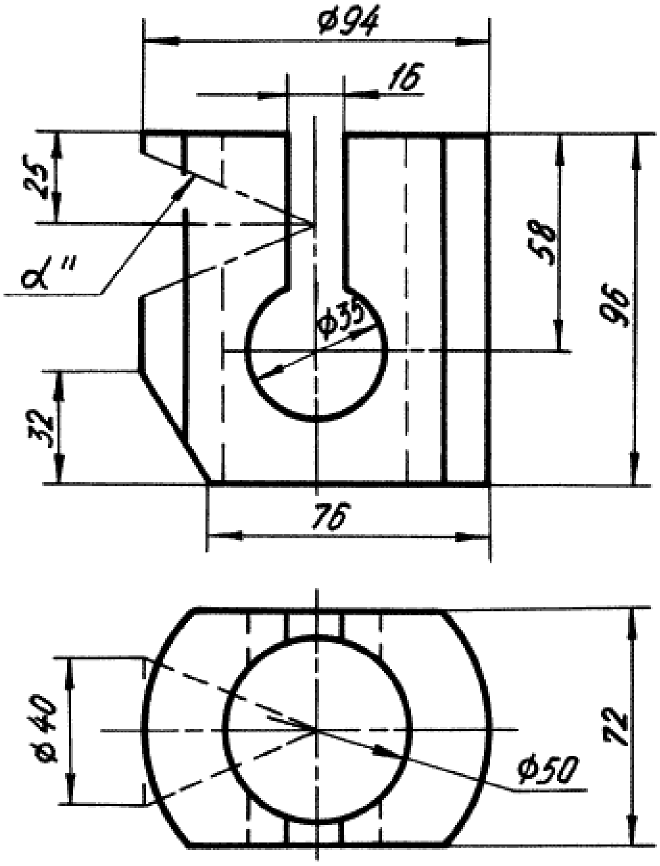


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 1, 2, 16, 17

3, 18



4,19

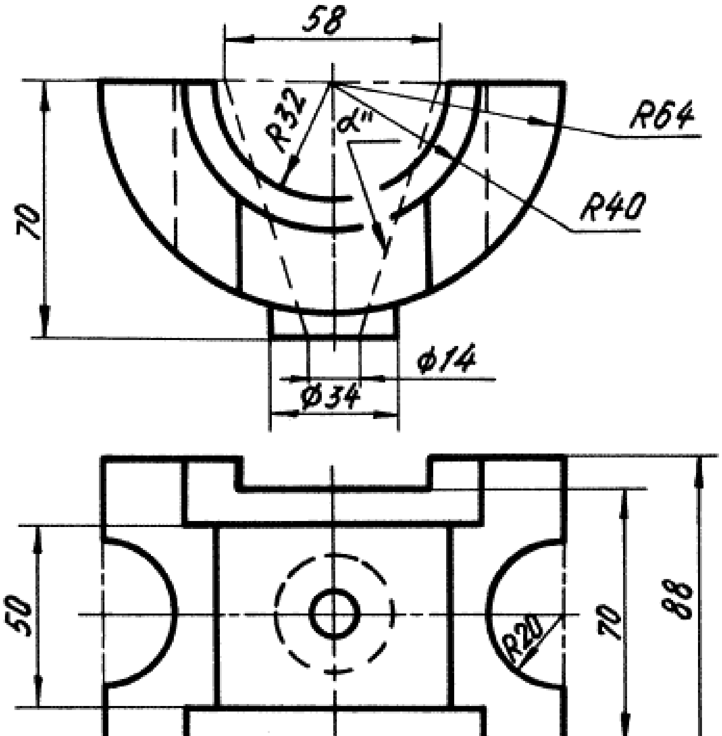
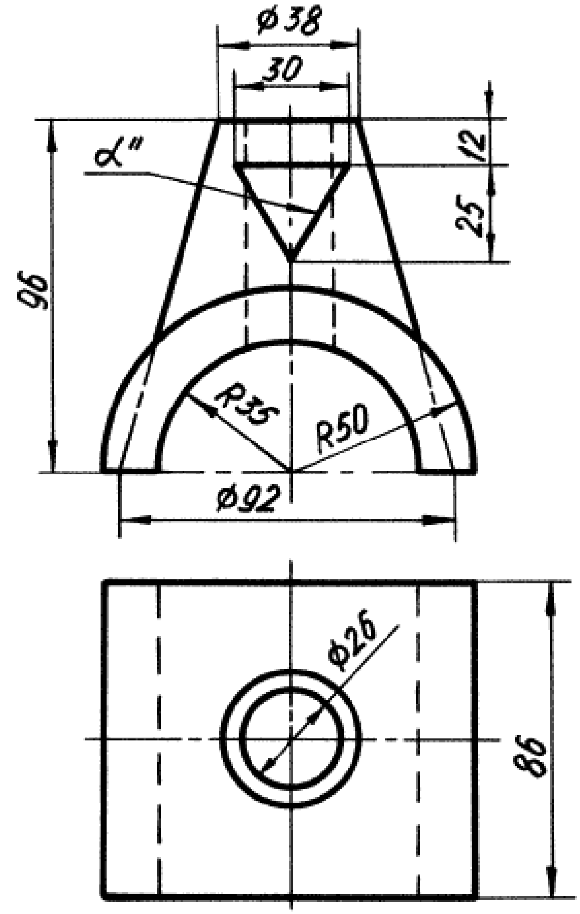


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 3, 4, 18, 19

5, 20



6, 21

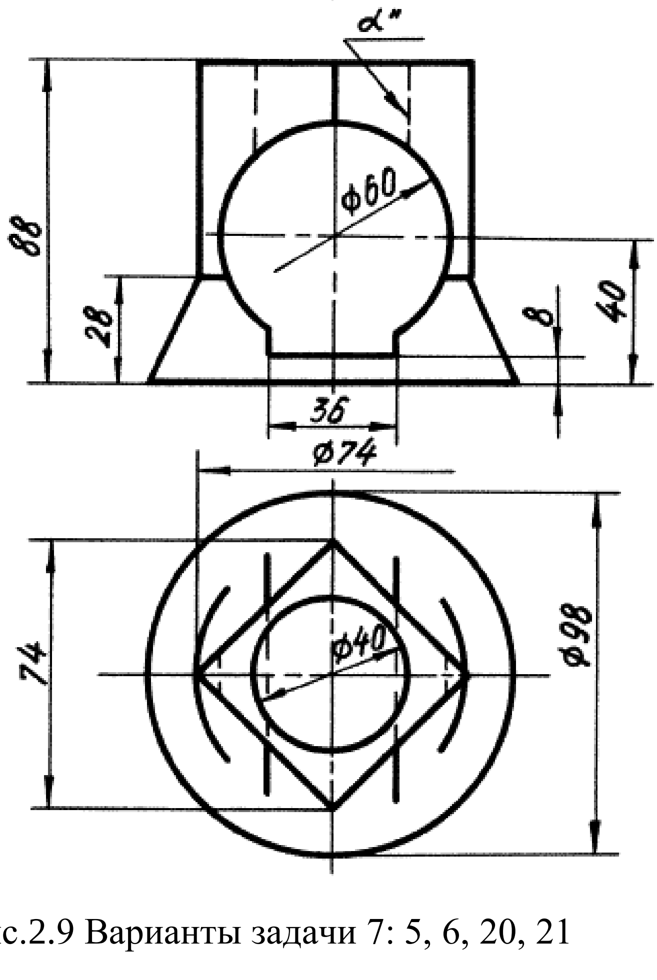
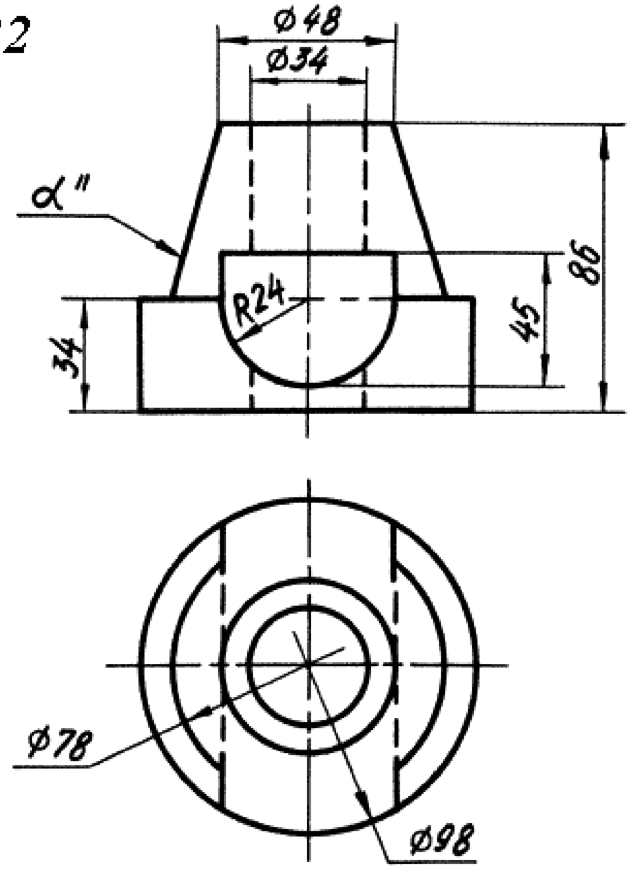


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 5, 6, 20, 21

7, 22



8, 23

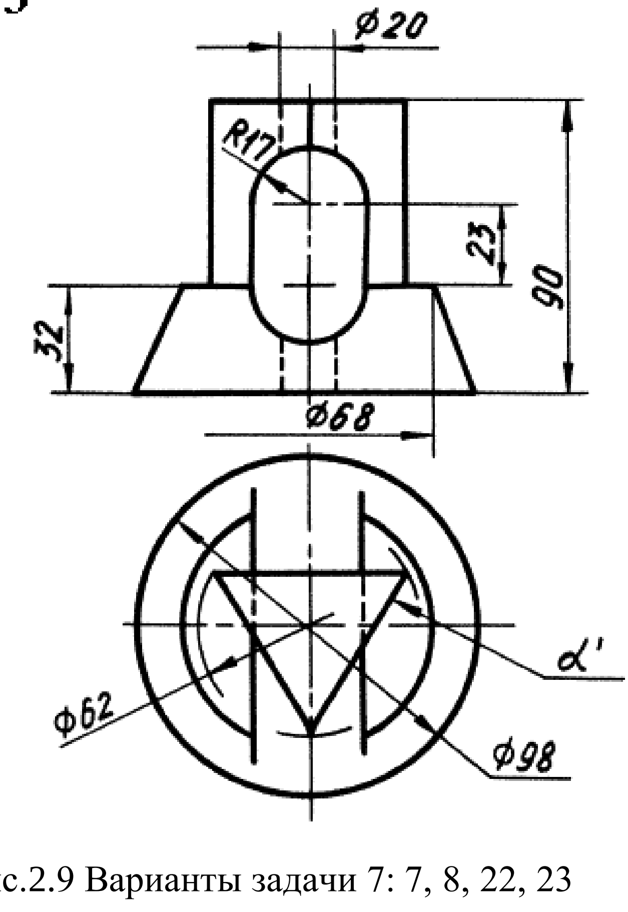
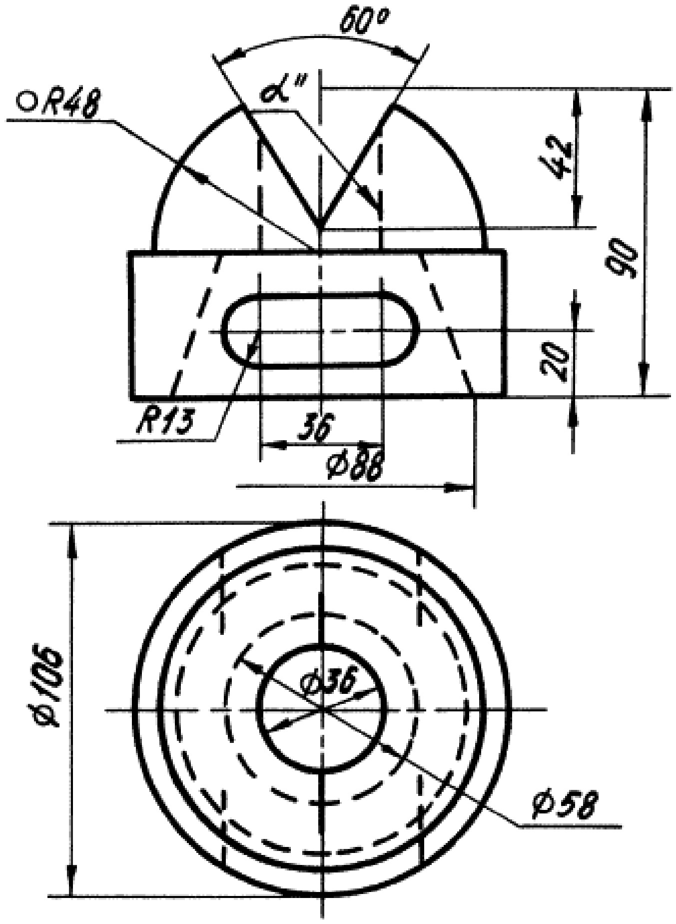


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 7, 8, 22, 23

9, 24



10, 25

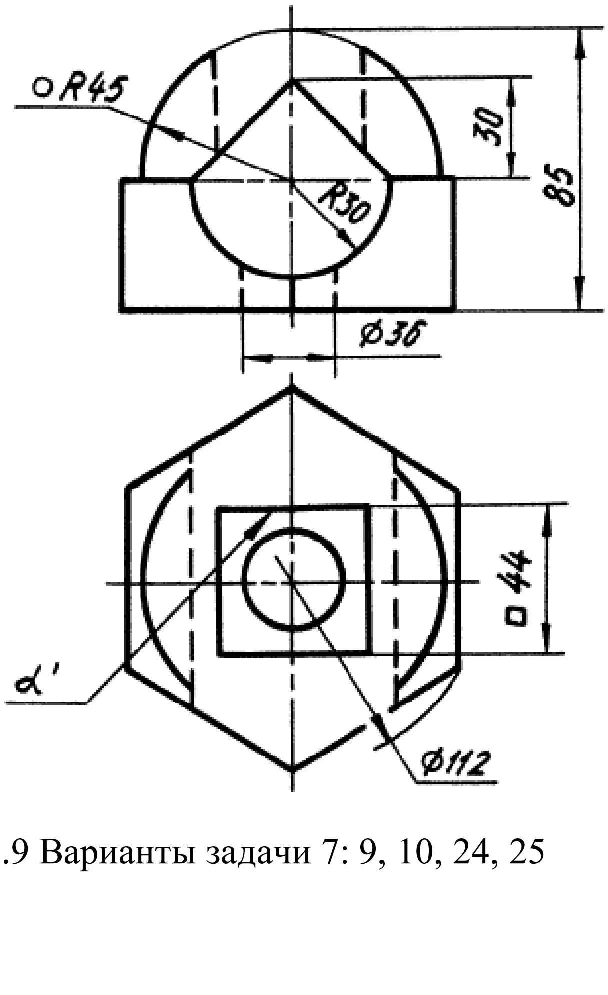
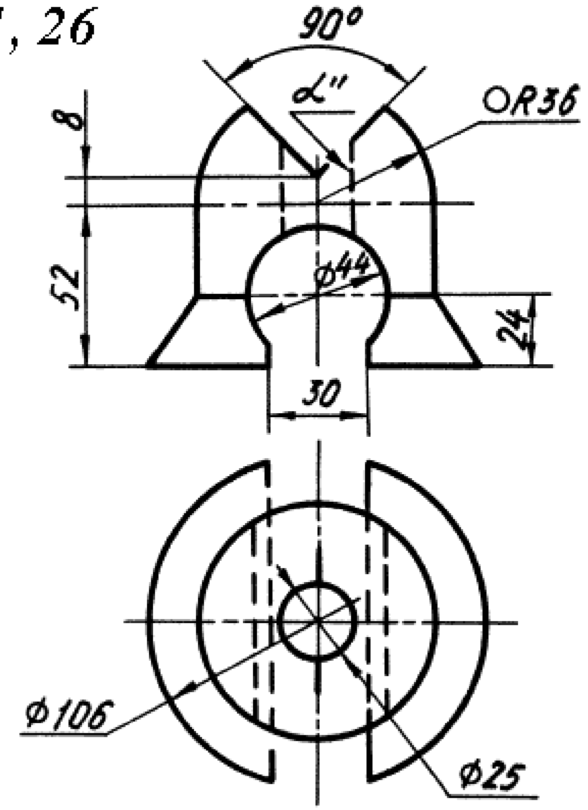


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 9, 10, 24, 25

11, 26



12, 27

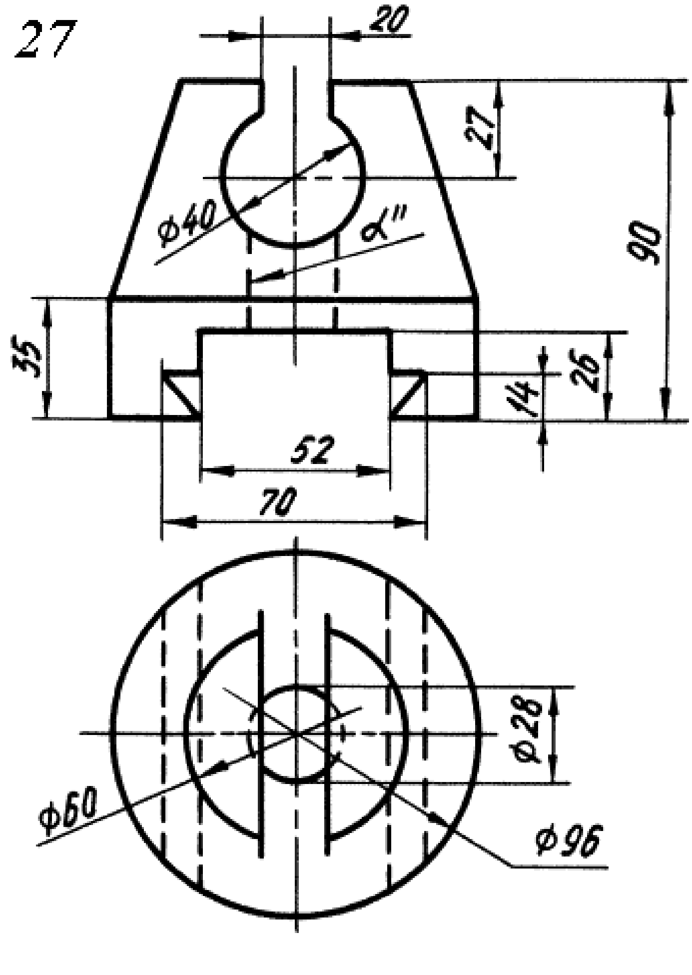
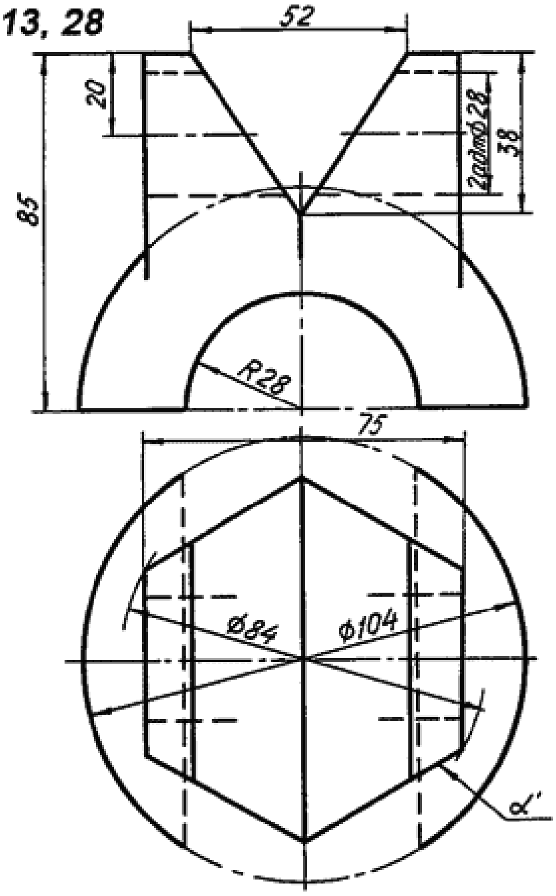


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 11, 12, 26, 27

13, 28



14, 29

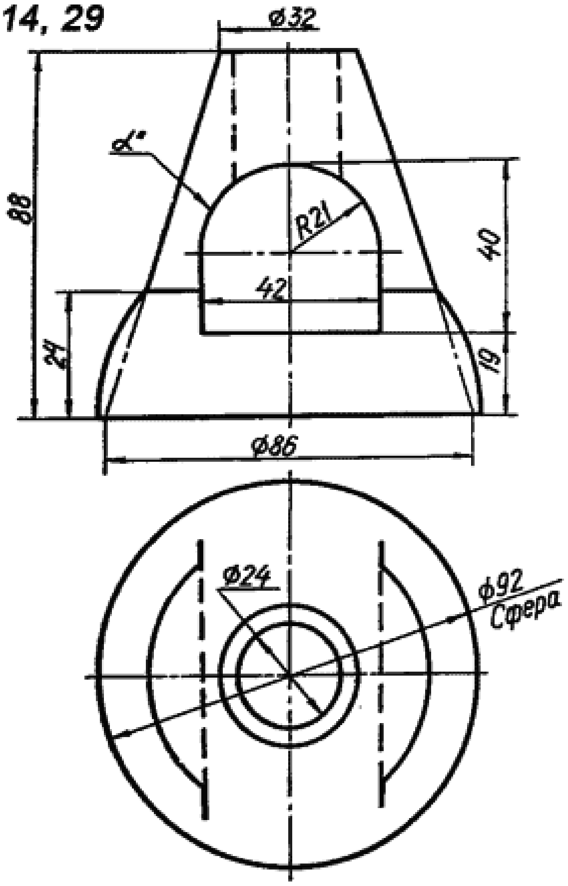


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 13, 14, 28, 29

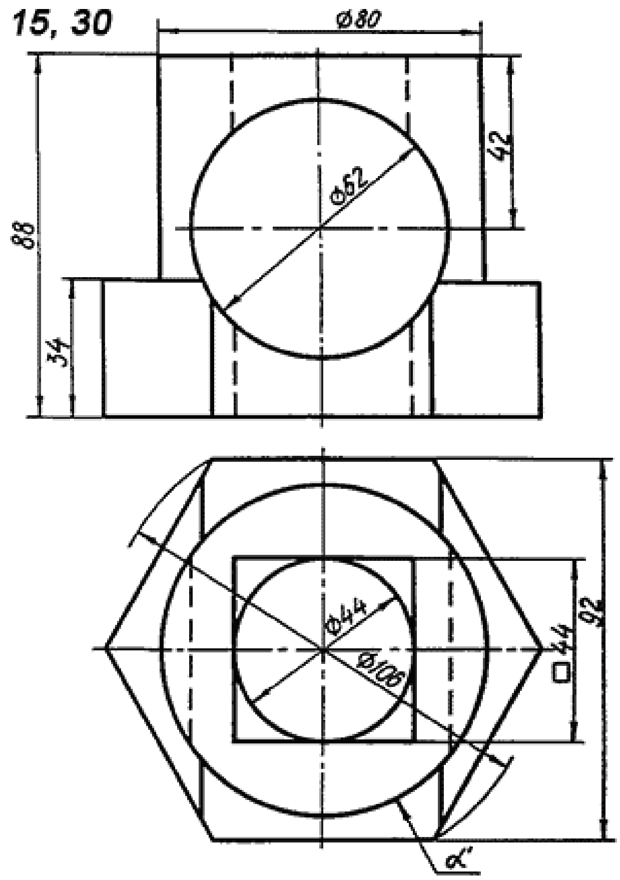


Рис.2.9 Варианты задачи 7: 15, 30

Таблица 2.6

Варианты	Что следует выполнить в задаче
1	2
1, 16 2, 17	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.
3, 18	1. Достроить линию пересечения поверхностей на главном виде. 2. Выполнить фронтальный разрез и профильный разрез в сочетании с видом слева.
4-7, 19-22	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.

Окончание таблицы 2.6

1	2
8, 23	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный разрез в сочетании с видом спереди и профильный разрез.
9, 24	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.
10, 25	1. Достроить линии пересечения поверхностей на главном виде и виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.
11, 26 12, 27	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.
13, 28	1. Достроить линии пересечения поверхностей на главном виде и виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.
14, 29 15, 30	1. Достроить линии пересечения поверхностей на виде сверху. 2. Выполнить фронтальный и профильный разрезы в сочетании с соответствующими видами.

Указания к решению задачи 7.

1. Линия пересечения поверхностей - это объединение точек, принадлежащих обеим поверхностям. Сначала определяют точки пересечения очерковых образующих. Затем с помощью вспомогательных секущих плоскостей (чаще всего) находят ряд точек искомой линии. По ним строят линию пересечения поверхностей. В качестве вспомогательных секущих плоскостей целесообразно использовать плоскости частного

положения, пересекающие заданные поверхности по окружностям или прямым. Например, плоскость $\alpha_1 \| \pi_3$ (рис.2.4) и пересекает сферу и конус по окружностям, пересекающимся в точке 2 (2', 2", 2"') и т.д. Необходимо определить видимость полученных линий. Следует обозначить проекции нескольких точек, принадлежащих каждой из полученных линий.

2. Все изображения и их обозначения должны соответствовать ГОСТ 2.305-68. При симметричных изображениях следует обязательно совмещать половину вида и половину разреза. При этом вид располагают слева, а разрез - справа. Не следует показывать штриховыми линиями внутренние контуры предмета. Они должны быть понятны по выполненным разрезам.

Пример выполнения задачи 7 представлен на рис.2.4.

Задача 8. По данным рис.2.10 согласно своему варианту следует:

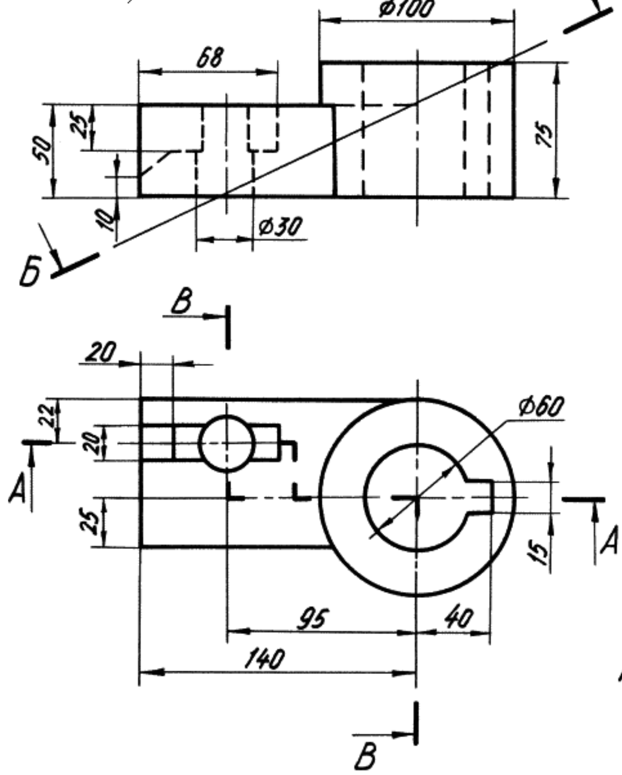
- построить третье изображение;

- выполнить указанные и, если необходимо, другие разрезы;

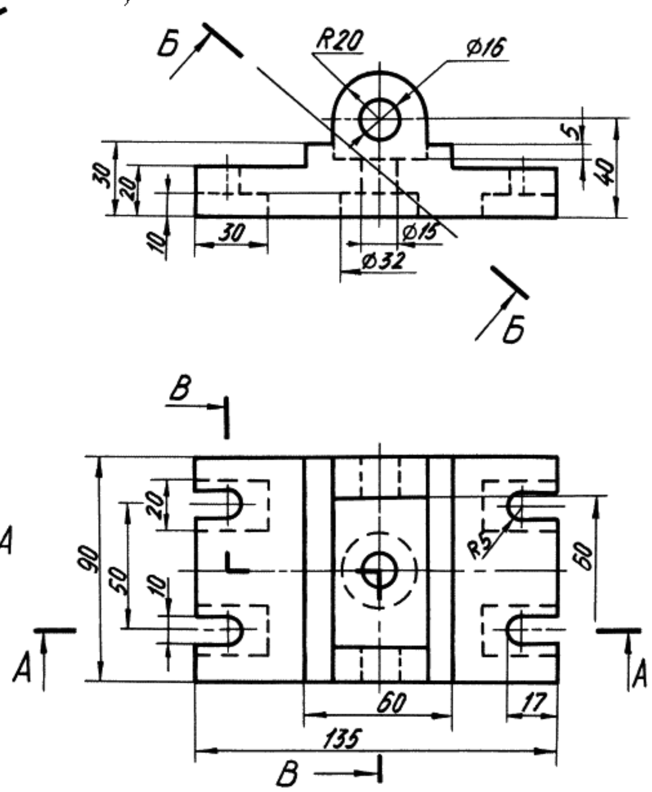
- построить вынесенное сечение Б-Б;

- нанести размеры.

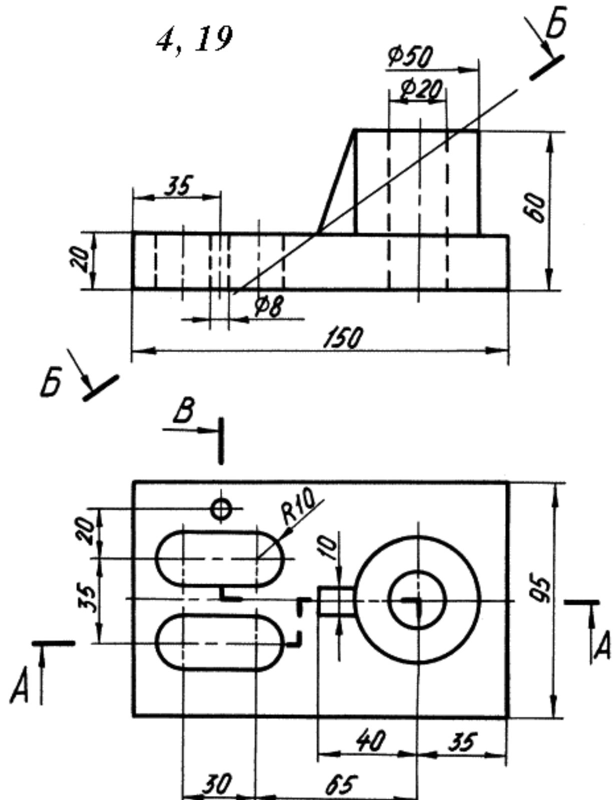
2, 17



1, 16



4, 19



3, 18

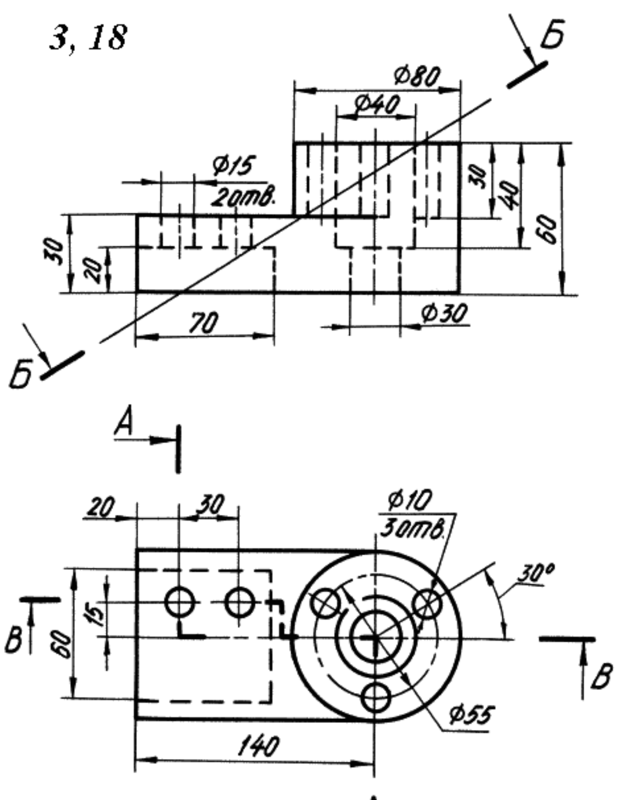
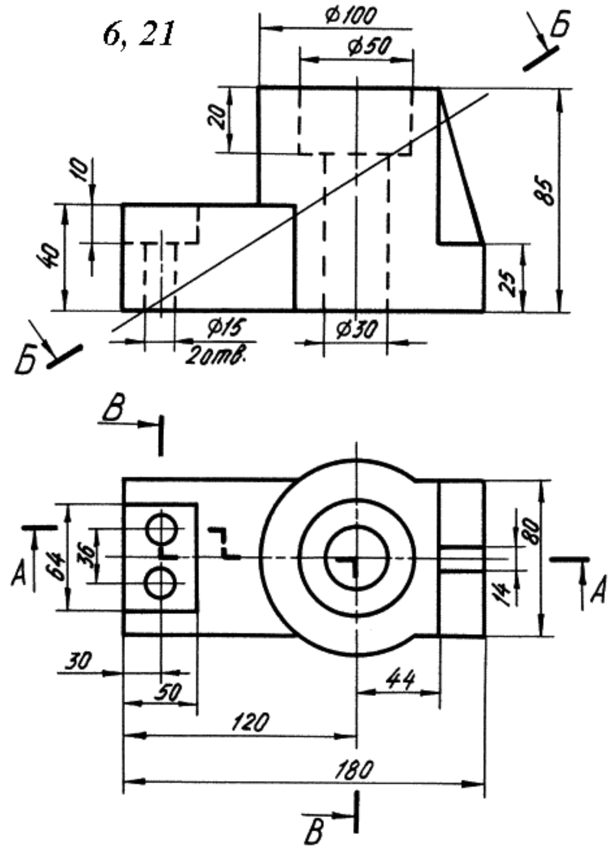
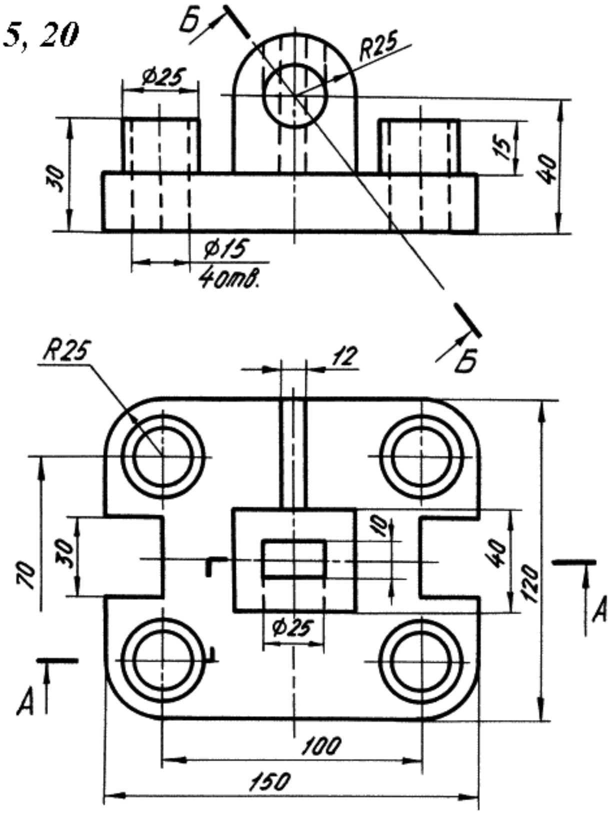


Рис.2.10 Варианты задачи 8: 1-4, 16-19

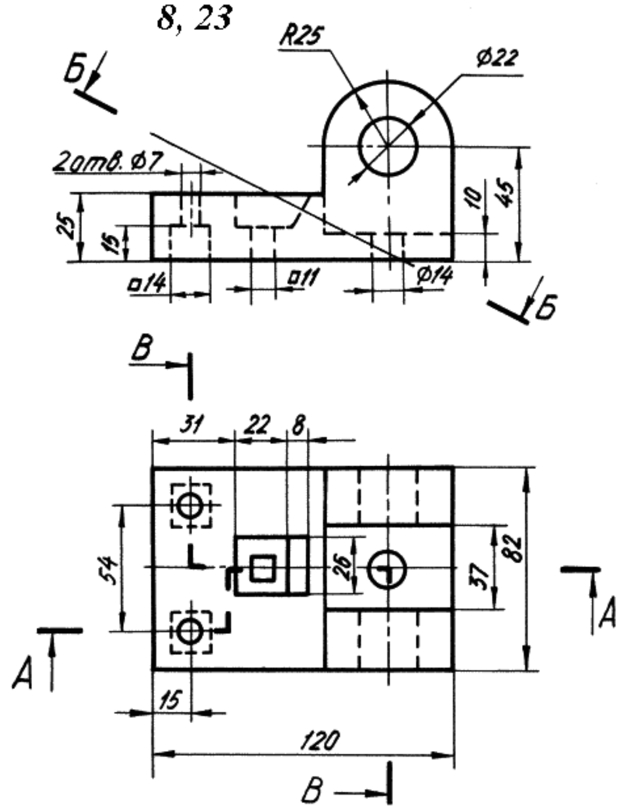
6, 21



5, 20



8, 23



7, 22

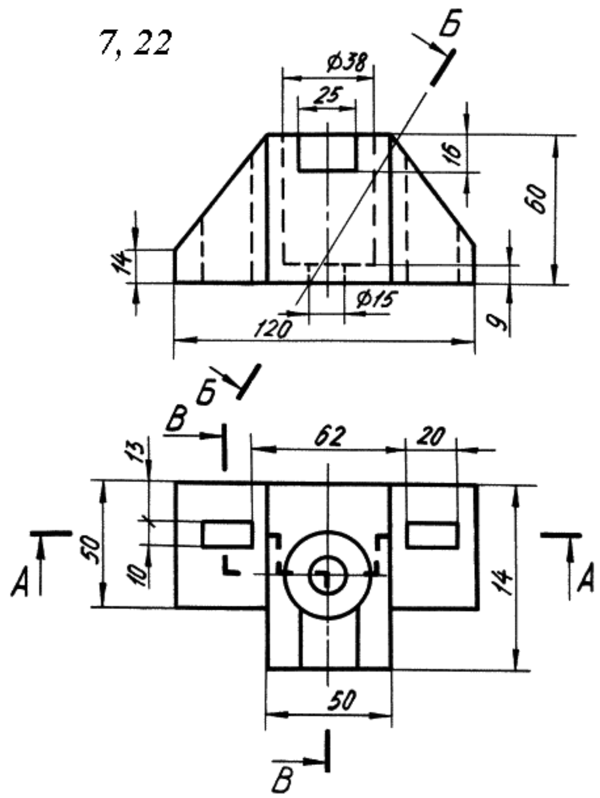
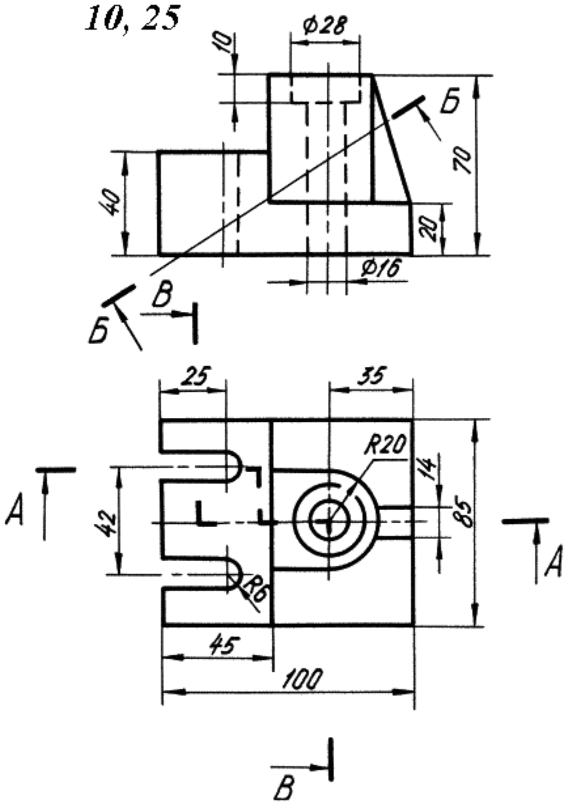
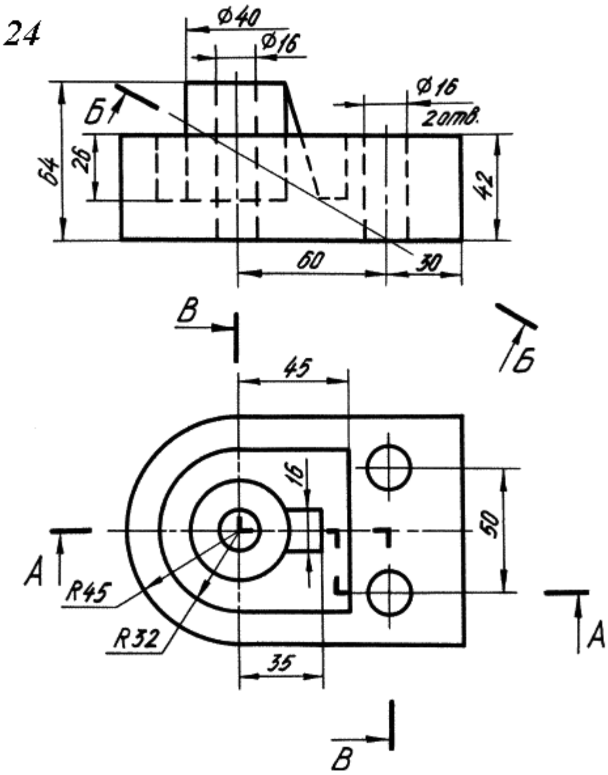


Рис.2.10 Варианты задачи 8: 5-8, 20-23

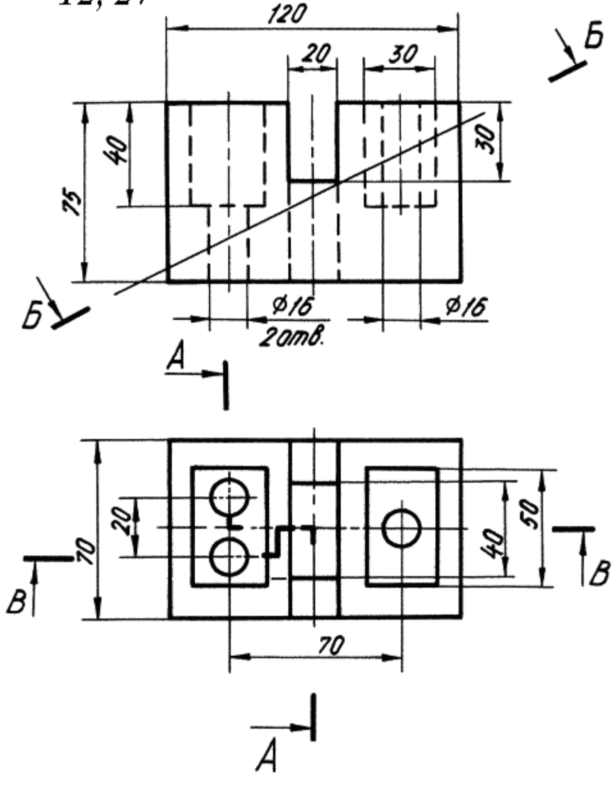
10, 25



9, 24



12, 27



11, 26

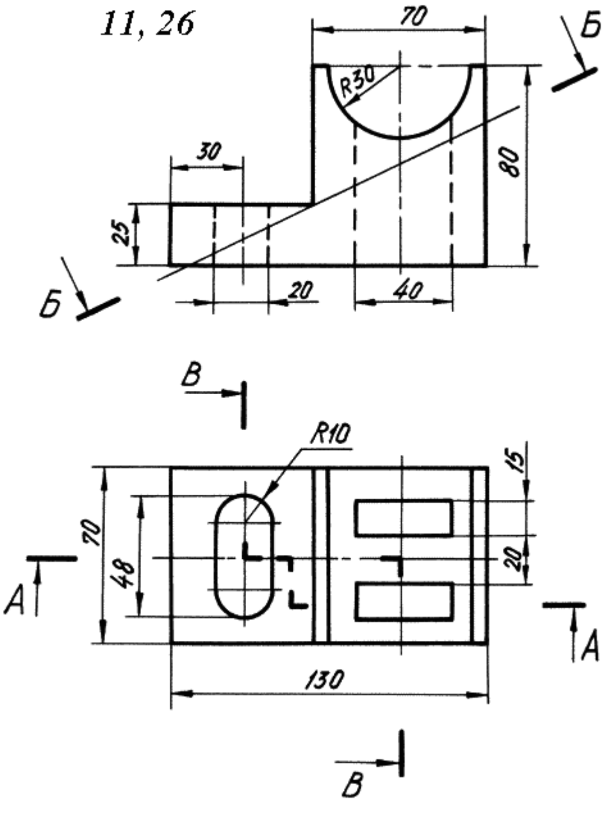
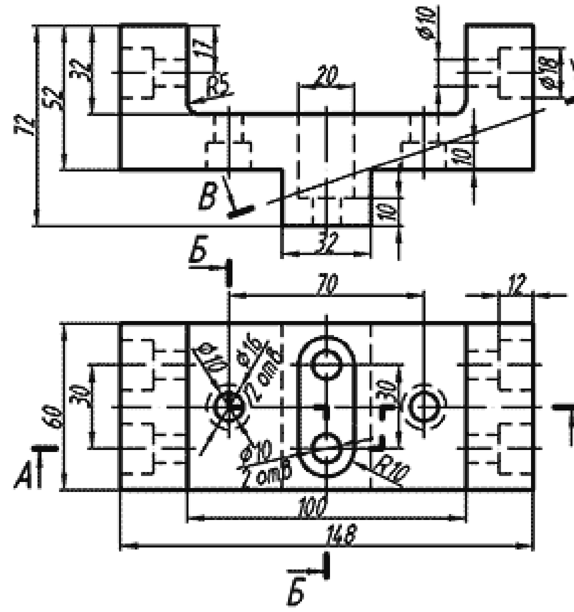
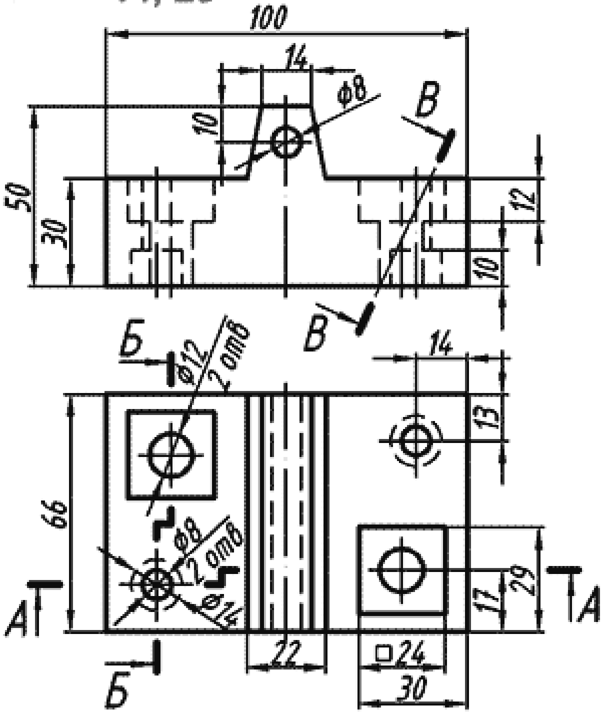


Рис.2.10 Варианты задачи 8: 9-12, 24-27

13, 28



14, 29



15, 30

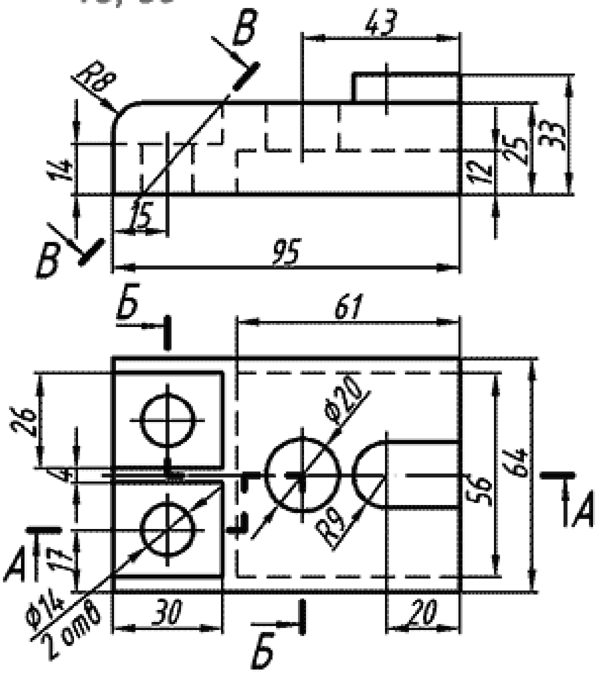


Рис.2.10 Варианты задачи 8: 13-15, 28-30

Указания к решению задачи 8.

1. Разрезы выполняются и обозначаются в соответствии с ГОСТ 2.305-68. Штриховых линий на чертеже быть не должно, кроме контуров поверхности, видимых только снизу.

2. Вынесенное сечение может быть построено, например, способом замены плоскостей проекций. В целях более удобного расположения сечение может быть повернуто. В этом случае рядом с обозначением сечения наносится условный знак (рис.2.11).

Рис.2.11

3. Размеры наносят в соответствии с ГОСТ 2.307-68.

Необходимо помнить:

- размеры, указанные в задании, следует распределять по трем изображениям равномерно, с учетом их сложности;

- каждый размер наносится только один раз;

- размеры, относящиеся к внешним контурам детали, ставятся на видах, а к внутренним - на разрезах;

- диаметры поверхностей вращения предпочтительно наносить на тех изображениях, где их ось вращения параллельна плоскости проекций;

- при нанесении размеров на изображении, представляющем сочетание вида и разреза, размеры наносят, как показано на рис.2.4 (размер ∅30);

- размерные линии не должны пересекаться с другими линиями (в отличие от выносных).

Пример выполнения задачи 8 приведен на рис.2.5.

Задача 9. Построить наглядное изображение (аксонометрическую проекцию) детали, чертеж которой выполнен в задаче 8. Внутренние формы деталей в аксонометрических проекциях выявляют "вырезом" передней части детали.

Указания к решению задачи 9. При выполнении задачи целесообразно использовать прямоугольную изометрическую или косоугольную фронтальную диметрическую проекции. Рациональная последовательность построения аксонометрической проекции по чертежу может быть следующей:

1. Выбирают вид аксонометрической проекции.

2. Проводят аксонометрические оси под установленными углами.

3. Строят "вырез".

4. Строят изображение верхней части детали, видимых внутренних элементов, наружные поверхности.

5. Выполняют штриховку сечений.

Линии штриховки сечений наносят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях (см. схему на рис.2.6).

На чертеже должны быть изображены координатные оси x, y, z и указано направление штриховки (см. рис.2.6). Изображение осевых и центровых линий цилиндрических отверстий выполняется как показано на рис.2.6 (изометрическая проекция).

Пример выполнения задания приведен на рис.2.6.

Для других типов аксонометрических проекций изображение и штриховку на «вырезе» следует выполнять с учетом направления осей координат и коэффициентов искажения по осям (ГОСТ 2.317-69).

ВНЕШНИЕ РЕСУРСЫ

Дополнительные учебные пособия